UV 8.5 Die Variable im Nenner: Bruchterme und Bruchgleichungen

Unterrichtsvorhaben zum KLP GYM SI Mathematik 2019

Januar 2020

# Kurzbeschreibung

|  |
| --- |
| Das vorliegende Unterrichtsvorhaben zeigt einen Weg auf, die neu im Kernlehrplan Gymnasium Sekundarstufe I im Bereich Arithmetik/Algebra verankerten Kompetenzen zum Umgang mit Bruchtermen und Bruchgleichungen zu erwerben. Es soll zugleich der Verengung der Term-Algebra auf nur drei Grundrechenarten (Addition, Subtraktion und Multiplikation) entgegenwirken, bei der allenfalls noch durch die binomischen Formeln eine Erweiterung stattfindet. Ferner soll es die Bruchrechnung der Erprobungsstufe anschlussfähig halten und Vernetzungen zu Anwendungen bei Ähnlichkeitsbeziehungen und in der Sekundarstufe II (z.B. bei Funktionsscharen) ermöglichen. Vermieden werden soll ein Vorratslernen, das auf ein isoliertes Bruchrechentraining mit Termen hinausläuft.  Traditionelle Inhalte des Inhaltsbereichs „Bruchterme und Bruchgleichungen“ sind Definitionsbereiche, Rechnen mit Bruchtermen, Lösen von Bruchgleichungen sowie außermathematische und geometrische Anwendungen. Im vorliegenden Unterrichtsvorhaben werden entgegen dieser Reihenfolge die theoretischen Grundbausteine in einem sinnstiftenden Kontext entwickelt und dann in zwei Einheiten systematisiert und eingeübt. Dabei werden bekannte Fehlermuster thematisiert. Dieses genetische Vorgehen wurde gewählt, damit die Lernenden selbst entdecken können, wie sich bekannte Rechengesetze für rationale Zahlen sowie Bruchrechenregeln verallgemeinern lassen. Ein umgekehrtes Vorgehen, das die Aufgaben im Kontext zu bloßen „Anwendungen“ degradiert, verführt Schülerinnen und Schüler tendenziell zu Oberflächlichkeit und Schubladendenken.  Eingebettet ist das Konzept in einen diagnostischen Rahmen. Ein erster Partnerdiagnosebogen stellt die Lernvoraussetzungen aus der Bruchrechnung in der Erprobungsstufe sicher und prüft bereits vorausgreifend ihre Transferfähigkeit auf einfache Terme. Der zweite Partnerdiagnosebogen ermöglicht eine Lernerfolgsüberprüfung am Ende der Sequenz und dient auch zur Vorbereitung einer Leistungsüberprüfung. Diese sollte sich sowohl an den Übungsaufgaben als auch an den im Unterrichtsgang geförderten prozessbezogenen Kompetenzen orientieren, die zu Beginn der Sequenz erworben werden. |

# Das Unterrichtsvorhaben im Überblick

Zeitbedarf: ca. 9 Unterrichtsstunden

1. Eingangsdiagnose (0,5 U.-Std.)
2. Unterrichtseinheit: Ein einfaches x im Nenner: eine Modifikation der antiproportionalen Zuordnung, erarbeitet an einem alltagsnahen Kontext (2 U.-Std.)
3. Unterrichtseinheit: Ein linearer Term im Nenner, erarbeitet an einem geometrischen Problem (2 U.-Std.)
4. Unterrichtseinheit: Mit Bruchtermen rechnen (2 U.-Std.)
5. Unterrichtseinheit: Bruchgleichungen lösen (2 U.-Std.)
6. Nachdiagnose (0,5 U.-Std.)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Kurzbeschreibung | Zielsetzung | Didaktische Hinweise | Unterrichtsmaterial | Diagnose |

# Zielsetzung

Dieses Unterrichtsvorhaben konkretisiert eine mögliche Umsetzung des schulinternen Lehrplans Mathematik, der auf dem Kernlehrplan Gymnasium SI Mathematik (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2019) basiert.

Die in der Tabelle aufgeführten Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Arithmetik/Algebra   * Lösungsverfahren:  algebraische […] Lösungsverfahren ([…] elementare Bruchgleichungen) | Konkretisierte Kompetenzerwartungen  Die Schülerinnen und Schüler …  (Ari-4) deuten Variablen als Veränderliche zur Beschreibung von Zuordnungen, als Platzhalter in Termen und Rechengesetzen sowie als Unbekannte in Gleichungen und Gleichungssystemen,  (Ari-7) formen Terme, auch Bruchterme, zielgerichtet um und korrigieren fehlerhafte Termumformungen,  (Ari-9) ermitteln Lösungsmengen *linearer Gleichungen und linearer Gleichungssysteme sowie* von Bruchgleichungen unter Verwendung geeigneter Verfahren und deuten sie im Sachkontext,  Prozessbezogene Kompetenzerwartungen  (Ope-5) arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen,  (Ope-8) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln,  (Pro-5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Beispiele finden, Spezialfälle finden […]),  (Pro-6) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,  (Pro-9) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern. | Zur Umsetzung   * Bruchterme erweitern antiproportionale Zusammenhänge ←7.1 * Fehlvorstellung (Übergeneralisierung) des Distributivgesetzes auf Terme der Art offensiv begegnen * Bruchgleichungen der Form nach auflösen * Betrachtung von Sonderfällen, in denen sich eine lineare Gleichung ergibt auch unter dem Aspekt des Definitionsbereichs * Reaktivierung der Rechenregeln zur Bruchrechnung durch Multiplikation und Addition von Bruchtermen ←6.5 / 6.7. * Variablen (und Linearfaktoren nach Anwendung der binomischen Formeln) Ausklammern und ggf. Kürzen   Zur Vernetzung   * Zusammenhang zu geometrischen Problemlöseaufgaben (Proportionen in ähnlichen Dreiecken) und Bruchgleichungen →10.3   Zur Erweiterung und Vertiefung   * Bruchterme als Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich auffassen |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| [Kurzbeschreibung](#_Kurzbeschreibung) | [Zielsetzung](#_Didaktische_Hinweise) | [Didaktische Hinweise](#_Didaktische_Hinweise) | [Unterrichtsmaterial](#_Unterrichtsmaterial) | [Diagnose](#_Diagnose) |

# Didaktische Hinweise

## Didaktische Begründung des Konzeptes

Im Kernlehrplan werden unter den inhaltlichen Schwerpunkten (MSB, 2019, Kap. 2.4.1, S.28) „elementare Bruchgleichungen“ aufgeführt. Der durch diese Formulierung eingeräumte Spielraum wird hier durch die Beschränkung auf Terme mit linearen Zähler und Nenner  ausgefüllt[[1]](#footnote-1). Sie bieten den Vorteil, dass beim Lösen von Gleichungen auftretende Umkehrungen wieder von der gleichen Form sind: , so dass die gewählte Beschränkung nicht aufgehoben wird. Dementsprechend werden auch bei Termumformungen nur Terme mit linearem Zähler und Nenner verwendet. Meist sind einzelne Parameter dabei auch noch null.

Bei allen Unterrichtseinheiten spielen Differenzierungsmaßnahmen eine Rolle, ob durch offene Problemlöseaktivitäten, gestufte Niveaus oder vertiefende Zusatzaufgaben. Verstehensorientierung spiegelt sich in Begründungsaufgaben und reflexionsanregenden Fragen. Ein spiraliger Aufbau wird dadurch angelegt, dass grundlegende Strukturen zunächst an zwei in einen Kontext eingebetteten Aufgaben erarbeitet werden. In der 1. Unterrichtseinheit wurde dazu ein ökonomischer Kontext, in der 2. Unterrichtseinheit ein geometrischer Kontext gewählt. Dabei sind die Aufgaben für unterschiedliche Lösungswege offen, zu denen auch solche gehören, die bereits Techniken des Rechnens mit Bruchtermen und Bruchgleichungen antizipieren. Erst in den darauf folgenden Einheiten werden diese Techniken dann zu regelhaften Einsichten verdichtet.

Die 3. Unterrichtseinheit dient nun dem systematischen Operieren mit Bruchtermen. Dabei wird die Einbettung in die Bruchrechnung erkennbar, indem Operationen (Kürzen, Erweitern, Vervielfachen und Anwenden der Grundrechenarten) teilweise nur mit Zahlen vollzogen werden, während die eingebauten Variablen eine Statistenrolle einnehmen. Im Anschluss wird die Operation auf Variablen oder sogar auf ganze Terme ausgeweitet. Die Rolle der Definitionslücken soll stets besondere Beachtung finden, um die Spezifik des Lernvorhabens hervorzuheben. Beim Übungsprozess werden reflexionsanregende Fragestellungen – u .a. zu Fehlern – eingearbeitet, die den Erkenntnisprozess ankurbeln. Ziel des Lernens ist der gleichermaßen korrekte wie flexible Umgang mit den Term-Operationen.

Nach dem gleichen Prinzip ist die 4. Unterrichtseinheit konzipiert. Zur Lösung von Bruchgleichungen wird die Beseitigung von Nennern als niederschwelliges Standardverfahren eingeführt. Das Gros der Bruchgleichungen lässt sich in die Form  bringen, wobei  die gesuchte Variable ist und der Bruchterm nicht zu einer Konstante kürzbar ist. Die Definitionslücke  kann dann nicht zugleich Lösung der Gleichung sein. Vertiefend kann aber der Fall  vorkommen, in dem keine Lösung existiert.

Die im Anhang beigefügte Vertiefungseinheit greift über den Lehrplan hinausgehend den funktionalen Aspekt auf, um auch diese Grundvorstellung mit den neuartigen Termen zu verankern. Der Vorteil ist, dass Tabellen und Graphen die abstraktere Darstellungsform des Funktionsterms anschaulich werden lassen. So werden z.B. Definitionslücken durch Polstellen/zur y-Achse parallelen Asymptoten augenscheinlich.

## Sicherung von Nachhaltigkeit

Das Unterrichtsvorhaben beginnt mit einer Eingangsdiagnose. Diese gibt nicht nur Auskunft über die individuelle Lernausgangslage, sondern auch darüber, wie weit es bereits gelingt, Bruchrechenoperationen wie Kürzen, Multiplizieren und Addieren auf Terme zu übertragen. Ferner wird das Prinzip der Einsetzungsgleichheit von Termen reaktiviert.

Die Diagnosebögen sind nach dem Prinzip der Partnerdiagnose konzipiert. Sie werden sinnvollerweise zunächst in Einzelarbeit bearbeitet. Danach haben die Partner (Sitznachbar oder nach dem Prinzip des Lerntempoduetts ermittelt) die Möglichkeit, sich über ihre Lösungen auszutauschen und ggf. Verbesserungen vorzunehmen. Diese sind in die Korrekturspalte einzutragen.

Mit einem andersfarbigem Stift wird im Anschluss in der Korrekturspalte der endgültige Ergebnisvergleich mithilfe einer Musterlösung oder im Zuge eines Ergebnisvergleichs im Plenum vermerkt, so dass auch die Anzahl der richtigen Lösungen ermittelt werden kann. Eine der Anonymisierung dienende Codenummer anstelle des Klarnamens erlaubt es der Lehrkraft, die Bögen zur *Vorbereitung* der Unterrichtseinheit bzw. Evaluation des Unterrichtsvorhabens auszuwerten.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| [Kurzbeschreibung](#_Kurzbeschreibung) | [Zielsetzung](#_Didaktische_Hinweise) | [Didaktische Hinweise](#_Didaktische_Hinweise) | [Unterrichtsmaterial](#_Unterrichtsmaterial) | [Diagnose](#_Diagnose) |

# Unterrichtsmaterial mit didaktischen Erläuterungen

## 1. Unterrichtseinheit – ein einfaches x im Nenner

Ein einfaches  im Nenner: eine Modifikation der antiproportionalen Zuordnung, erarbeitet an einem schulnahen Kontext.

### Zentrale Lernaufgabe

Ein Sportverein möchte einen Jahresausflug in einen Freizeitpark unternehmen. Dafür stellt das örtliche Busunternehmen einen Bus mit 51 Plätzen zum Preis von 450 € zur Verfügung. Für den Eintritt in den Freizeitpark werden im Schnitt 15 € pro Teilnehmer gerechnet.

a) Berechne die Kosten pro Person für den Fall, dass 30 Mitglieder des Sportvereins am Ausflug teilnehmen.

*b) Untersuche, wie sich die Kosten pro Person je nach Anzahl der Teilnehmer an dem Ausflug unterscheiden.*

*c) Beschreibe deine Rechnungen durch einen Term mit der Variablen x = Teilnehmerzahl.*

*d) Berechne, wie groß die Teilnehmerzahl mindestens sein muss, damit maximal 35 € von jedem Teilnehmer eingesammelt werden müssen.*

Zur Vertiefung:

Bei einer Fahrt mit Jugendlichen ist der Eintritt für zwei begleitende Erwachsene frei. An den Fahrtkosten sind sie hingegen in gleicher Weise beteiligt.

e) Stelle einen Term zur Berechnung der Kosten für einen Jugendlichen in Abhängigkeit von der Anzahl x der Jugendlichen auf.  
Stelle auch einen Term für den Fall auf, dass die eingesparten Eintrittskosten für die beiden Begleiter allen Teilnehmern zugutekommen, so dass alle Personen das Gleiche bezahlen.

### Ziel der Sicherung

Vorab soll noch einmal auf den Einsatz des Eingangsdiagnosetools im Vorfeld des Unterrichtsvorhabens, spätestens aber begleitend mit dessen Beginn hingewiesen werden. Die zunächst geschlossene Fragestellung aus a) wird in b) geöffnet, um den Abstraktionsschritt zum Aufstellen eines Terms in c) anzubahnen. Dieses didaktische Vorgehen sollte schon aus der Erprobungsstufe bekannt sein, wo erstmalig Terme in Zusammenhang mit Zahlenfolgen oder Mustern ins Spiel kommen (MSB, 2019, Kap. 2.4.1, S.28, Fkt-3). Es ist günstig, wenn die Lernenden durch eigenständiges Arbeiten beide Varianten  entdecken, so dass eine erste Anwendung des Distributivgesetzes diskutiert werden kann.

Teil d) ist auch durch Rückwärtsarbeiten zu bewältigen, ohne dass formale Rechenschritte nötig sind: Bei 35 € sind noch 20 € zur Deckung der Fahrtkosten übrig. Durch Division von 450 € durch 20 € und anschließendes Aufrunden findet man, dass mindestens 23 Teilnehmer mitfahren müssen. Durch eine geeignete begleitende Dokumentation werden aber bereits grundlegende Techniken zum Lösen von Bruchgleichungen erkennbar:



In der zur Differenzierung vorgesehenen Vertiefungsaufgabe wird der Term aus c) leicht modifiziert zu . Dies bietet Anlass für weitergehende Diskussionen, z.B. die Umformung in einen Bruch  und die Deutung dieses Terms: Die Kosten für die Jugendlichen sind also so, als würden sich die beiden Begleiter genau wie sie an den Kosten beteiligen, denn es spielt für die Jugendlichen keine Rolle, dass den Begleitern von Dritten Kosten erlassen oder erstattet werden.

Kommen die freien Eintritte hingegen allen gleichermaßen zugute, zahlt jeder , also  weniger. Auch der Term  ist korrekt und wird durch die Vorstellung gedeutet, dass die 30 € zur Senkung der Fahrtkosten verrechnet werden. Solche Überlegungen bahnen nicht nur Term-Operationen an, sondern sind ein Beitrag zur Stärkung Modellierungskompetenz.[[2]](#footnote-2)

## 2. Unterrichtseinheit – ein linearer Term im Nenner

Ein linearer Term im Nenner, erarbeitet an einem geometrischen Problem

### Zentrale Lernaufgabe

Das Grundstück der Hellmanns ist rechteckig und liegt an einer Straßenkreuzung. Es misst entlang der einen Straße 26 m und entlang der anderen 20 m. Nun will die Stadt die eine Straße durch einen Radweg verbreitern und dadurch die 26 m lange Grundstücksseite verkürzen. Um wie viel, das steht noch nicht genau fest. Die Hellmanns möchten gern ihre Grundstücksgröße erhalten und überlegen, ob sie an der anderen Seite eine Fläche hinzukaufen können. Dadurch ließe sich die 20 m lange Seite verlängern. Das Grundstücke hätte dann eine andere, aber immer noch rechteckige Form und die gleiche Flächengröße wie bisher.

1. Teil der Aufgabe

a) Veranschauliche die Situation durch eine Skizze. Gleiche deine Darstellung mit einer Musterlösung ab und diskutiere mögliche Unterschiede mit einem Mitschüler.

b) Berechne, wie viel Meter die Hellmanns hinzukaufen müssen, wenn die Stadt die Straße um 2 m [3 m] verbreitert.

c) Ersetze in der Rechnung aus b) die Vorgaben 2 m [3 m] durch eine unbekannte Länge x und fasse deine Ergebnisse in einem Bruchterm mit x zusammen.

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. Teil der Aufgabe

d) Überprüfe durch Nachrechnen, dass ein rechteckiges Grundstück mit den Seitenlängen  und  die gleiche Größe wie Hellmanns Grundstück hat.  
Vergleiche mit deiner Lösung aus c): Findest du deinen Term wieder?

Zur Vertiefung:

Herr Hellmann hatte zunächst die Idee, dass er einen Verlust von *x* Metern auf der einen Seite durch einen Zukauf von *x* Metern auf der anderen ausgleichen könnte.

e) Untersuche diesen Ansatz und vergleiche mit der Lösung aus c) und d).

#### Musterlösung zu a)

### Ziel der Sicherung

Schwierigkeiten im Bereich der geforderten Modellierungskompetenzen (Mod-1) und (Mod-4) werden durch die eingebaute Selbstkontrolle und die Partnerarbeit eingegrenzt. Dabei ist die Methode eines Lerntempoduetts sinnvoll. Inhaltlich steht im 1. Teil der Transfer aus der 1. Unterrichtseinheit im Zentrum. Die Schülerinnen und Schüler können zwar zunächst wieder explorativ arbeiten, sollten aber schließlich von sich aus z.B. auf den Term  zusteuern. Es ist denkbar, dass ein Teil der Lernenden trotz der didaktischen Lenkung zunächst mit zwei Variablen *x*, *y* arbeitet und zu der Gleichung  gelangt. Dies bietet die Chance, weitere Äquivalenzumformungen durchzuführen.

Der zweite Teil sollte erst ausgeteilt werden, wenn die Lernenden in c) zu einem eigenen Ergebnis gelangt sind. An dieser Stelle ist auch eine Zwischensicherung möglich. In d) können die Schülerinnen und Schüler die Korrektheit des angegebenen Terms bestätigen:

.

Hierbei muss ein Bruchterm gekürzt werden.

Der Vergleich mit c) bringt die Gleichung  zutage, ggf. mit der 20 auf der anderen Seite der Gleichung. Es bleibt hier im Sinne echter Problemorientierung offen, wie weit es den Lernenden gelingt, diese Gleichung zu bestätigen, sei es durch Einsetzen von Werten, sei es durch gezielte Umformungen. Nach dem Zusammentragen von Ideen der Lernenden können Ansätze im Unterrichtsgespräch präzisiert und dann von allen Schülerinnen und Schüler ausgeführt werden. So werden grundlegende Techniken der Term-Algebra schülerorientiert eingeführt, bevor sie in den beiden folgenden Unterrichtsvorhaben systematisch eingeübt werden. Möglich ist ein Nachweis durch „Hochmultiplizieren“ des Nenners oder durch Bilden des Hauptnenners auf der rechten Seite. Alternativ werden die beiden nennergleichen Bruchterme auf einer Seite zusammengefasst und gekürzt.

Das Potential der Vertiefung e) kann wie folgt ausgeschöpft werden:

Der Bruch  kann als Anteil für die Verlängerung dem kleineren Anteil  für die Verkürzung gegenübergestellt werden - ein aus der Prozentrechnung bekanntes Phänomen. Der Fehler in Herrn Hellmanns Ansatz kann als der zweite Summand in  identifiziert werden. Für  bewirkt er eine Vergrößerung des Grundstücks, weil beide Faktoren  und  positiv sind. Größere, aber unrealistische *x*-Werte führen hingegen zu einer Verkleinerung.

## 3. Unterrichtseinheit – Mit Bruchtermen rechnen

### Produktive Übungen

In diesem Abschnitt werden Aufgaben zum produktiven Üben vorgestellt und erläutert. Aus diesen können für die Lerngruppe gezielt Aufgaben ausgewählt und ggf. durch weitere Aufgaben mit entsprechenden Strukturen ergänzt werden.

In den folgenden Aufgaben gilt die folgende Vereinbarung, dass für jede Variable die „verbotenen Werte“, bei denen der Term nicht definiert ist, zu notieren sind.

a) Bei den nachstehenden Bruchtermen lässt sich jeweils eine Zahl, eine Variable oder sogar ein ganzer Term wegkürzen. Einige Bruchterme bleiben dabei übrig. Die Lernenden sollen im Sinne des reflektierenden Übens die Beispiele unter diesem Aspekt sortieren und erklären, wie sie gekürzt haben. Die Variable wird hier noch einheitlich mit x bezeichnet.

    

    

Der 2.Term bleibt deshalb ungekürzt übrig, weil als Zahlbereich intuitiv die ganzen Zahlen zugrunde gelegt werden. Es muss darüber diskutiert werden, dass er im Zahlbereich der rationalen Zahlen zu einem linearen Term  umgeformt werden kann. Dies gilt auch für den 4. Term.

Das Erweitern wird nicht geübt, da es beim Addieren und Subtrahieren unter e) eine Rolle spielt.

b) Zur weiteren Festigung sollen die Lernenden erklären, wieso die Terme nicht gleichwertig sind:

 

Es werden zwei Fehler, das partielle Kürzen und die Übergeneralisierung des Distributivgesetzes, zur Diskussion gestellt.

c) Produkte und Quotienten werden nach bekannten Rechenregeln zu Brüchen zusammengefasst. Durch Nutzung von Rechenvorteilen, die sich durch frühzeitiges Kürzen ergeben, wird schematisches Vorgehen vermieden und die Aufgabe mit der vorausgehenden vernetzt.

     

  

d) Summen oder Differenzen im Zähler können in Summen bzw. Differenzen von Bruchtermen aufgeteilt werden. Dieses Prinzip greift nicht auf eine Bruchrechenregel, sondern auf das Distributivgesetz zurück. Dabei kann jederzeit gekürzt werden. Eine fehlerhafte Übergeneralisierung wurde bereits in b) thematisiert.

   

e) Das Vorgehen aus d) kann umgedreht werden, wobei die Bestimmung eines gemeinsamen Nenners durch Erweitern dem Vorgehen beim Addieren bzw. Subtrahieren von Brüchen folgt. Im Falle der Nenner 2y und y sollte der Vorteil eines kgV gegenüber dem Produkt der Nenner verdeutlicht werden.

     

    

Der Problemlösecharakter der Aufgaben kann erhöht werden, wenn als Ziel der Bearbeitung ausgegeben wird, den Term möglichst einfach zu schreiben. Dies führt zu unterschiedlichen Lösungswegen oder sogar zu unterschiedlich von den Lernenden bewerteten Ergebnissen. In diesem Sinne kann die Aufgaben für vielfältige Ansätze geöffnet werden. Dazu wurde die Anzahl an Termen erhöht, so dass die Lernenden eine Auswahl treffen können, was eine erneute Differenzierung erlaubt. Bewusst wurde keine Sortierung nach vermeintlichem Schwierigkeitsgrad vorgenommen.

### Zusatzaufgabe

Die gewonnenen Kompetenzen im Umgang mit Bruchtermen werden zu einer Reorganisation der bekannten Bruchrechenregeln genutzt. Dabei können die Lernenden selbständig arbeiten, indem sie die Lücken in der folgenden Zusammenstellung ergänzen.

*(1) Erweitern und Kürzen :* 

*(2a) Vervielfachen :* 

*(2b) Multiplizieren :* 

*(3a) Dividieren :* 

*(3b) Dividieren :* 

*(4) Addieren :* 

*(5) Subtrahieren :* 

Zur Vertiefung können die Regeln (4) und (5) für den Fall gleichnamiger Brüche  formuliert werden. Dies bringt noch einmal das Distributivgesetz ins Spiel (vgl. d).

## 4. Unterrichtseinheit – Bruchgleichungen lösen

Alle Bruchgleichungen in dieser Unterrichtseinheit lassen sich auf lineare Gleichungen zurückführen, z.B.  auf . Die linearen Gleichungen lassen sich dann leicht lösen.

Das vorgestellte Verfahren kann anschaulich als „Nenner hochmultiplizieren“ betitelt werden. Die Zulässigkeit des Verfahrens kann an einem Beispiel von den Lernenden erklärt werden. Der Definitionsbereich erzeugt keine Einschränkungen.

Zur Öffnung der Aufgabe und zur Vernetzung mit der 3. Unterrichtseinheit werden vereinfachende Möglichkeiten zur Termumformungen präsentiert:

* Erweitern
* Kürzen
* Auf einen Nenner bringen
* Nenner vergleichen
* Kehrwert bilden

Die Anwendung dieser sich im Einzelfall anbietenden Umformungen stärkt ein strategisches Vorgehen beim Lösen von Problemen. Es kann durch Beispielrechnungen unterstützt werden, die aber nur als optionale Hilfe angeboten werden sollten.

### Angebot produktiver Übungen

a) Vor das Lösen sollte bei den ersten Aufgaben ein Probieren mit ganzzahligen Werten wie z.B.  gesetzt werden, um auch den Einsetzungsaspekt von Termen zu trainieren.

Die Lernenden können das Aufgabenmaterial systematisch auf vereinfachende Termumformungen hin untersuchen oder diese von Fall zu Fall anwenden, wobei auch alternative Lösungswege bei ein und derselben Aufgabe beschritten werden können. Es ist auch legitim, wenn Lernende zunächst den Fokus ganz auf das neue Verfahren „Nenner hochmultiplizieren“ legen und beim Üben schematisch vorgehen, bevor sie sich auf vernetzende Aspekte einlassen. Um sie nicht ganz aus dem Anspruch des reflektierenden Übens zu entlassen, sollen sie die Aufgaben von „einfach“ über „mittel“ bis „schwierig“ sortieren.

    

    

    

In der Sicherung ist es aufschlussreich zu beurteilen, ob Termumformungen den Schwierigkeitsgerad wirklich senken konnten. Auf diese Weise erscheinen Anforderungen nicht willkürlich, sondern werden einem verständnisgeleiteten Urteil der Lernenden ausgesetzt. Methodisch bietet es sich dabei an, verschiedene Lösungen zu ausgewählten Aufgaben in gut dokumentierter Qualität zu sammeln.

Zur Vertiefung eignen sich grundsätzlich Aufgaben, bei denen sich quadratische Gleichungen ergeben. Durch eine spezielle Wahl der Zahlen fällt im folgenden Beispiel jedoch der quadratische Term wieder heraus: .

b) Der Übungsprozess sollte mit einem Argumentationsformat abschließen.

1. Die Frage, wann die Gleichung  lösbar ist, kann untersucht werden, indem man unterschiedliche Werte für y, darunter auch , der Reihe nach einsetzt. Als Zielkontrolle kann eine Vorhersage getroffen werden, für welchen Wert y die Gleichung  unlösbar ist.
2. Die Begründung der Unlösbarkeit von  wird angeregt. Hierbei wird häufig mit dem Nenner multipliziert, wobei dann dessen Nullstelle  auszuschließen ist, da in diesem Fall keine Äquivalenzumformung vorliegt. Einfacher ist jedoch das Argument, dass ein Bruch bzw. ein Quotient nur 0 sein kann, wenn der Zähler bzw. Dividend 0 ist. Dies schließt nicht aus, dass außerhalb des Definitionsbereichs ein Quotient wie  durch 0 fortsetzbar ist.

c)Zur Vertiefung und zur innermathematischen Motivierung für das Auftreten von Bruchgleichungen kann die lineare Gleichung  mit Parameter  nach *x* gelöst werden. Dabei können die folgenden Leitfragen den Vertiefungsgrad steigern.

*(1) Welche Lösung x ergibt sich im Fall* *?*

*(2) Für welches*  *ist die Lösung* *?*

*(3) Für welches*  *gibt es keine Lösung?*

*(4) Für welche Werte von*  *ist die Lösung x positiv?*

Die Lösung  ist hier einfach, so dass das bisher Gelernte in einen innermathematischen, argumentativen Kontext eingebettet wiederaufgegriffen wird. Die Fragen können aber auch ad hoc anhand der (ggf. umgeformten) linearen Gleichung beantwortet werden.

Die Relevanz der Aufgabe liegt auch darin, dass bei der Untersuchung von Funktionsscharen, die z.B. bei unterbestimmten Steckbriefaufgaben entstehen, auch kompliziertere Bruchterme auftreten, z.B. bei der parameterabhängigen Beschreibung von Nullstellen oder Extrempunkten.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Kurzbeschreibung | Zielsetzung | Didaktische Hinweise | Unterrichtsmaterial | Diagnose |

EingangsdiagnoseCodenummer:

*Hinweis: Die Spalte „Korrektur“ beim ersten Ausfüllen frei lassen. Sie ist nach dem Vergleich mit dem Partner gemeinsam auszufüllen und soll am Ende die richtigen Ergebnisse enthalten.*

1. Teil: Setze Zähler  und Nenner  in den Bruch  ein und kürze, wenn möglich.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | Bruch | Korrektur |  | *a* | *b* | Bruch | Korrektur |
| 18 | 27 |  |  | 38 | 2*x* |  |  |
| - 49 | 14 |  |  | 5*x* | 4*x* |  |  |
| 6x | 3 |  |  | 2 + 8*x* | 4 |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 6*

2. Teil: Berechne das Produkt  und kürze das Ergebnis vollständig.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *c* | *d* | Ergebnis | Korrektur |
| 3 | 2 | - 4 | 5 |  |  |
| 10 | *x* | 2*x* | - 14 |  |  |
| 6 + 2*x* | 5 | 2 | *x* |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 3*

3. Teil: Berechne die Summe  und kürze das Ergebnis vollständig.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *c* | *d* | Ergebnis | Korrektur |
| 1 | 3 | 2 | 5 |  |  |
| *x* | 2 | 3 | 8 |  |  |
| 7 | 5*x* | -3 | *x* |  |  |
| 9 - *x* | 4 | 2 | 5 |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

4. Teil: Verbessere Fehler in Termumformungen.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Termumformung | Korrektur |  | Termumformung | Korrektur |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

Nachdiagnose Codenummer:

*Hinweis: Die Spalte „Korrektur“ beim ersten Ausfüllen frei lassen. Sie ist nach dem Vergleich mit dem Partner gemeinsam auszufüllen und soll am Ende die richtigen Ergebnisse enthalten.*

1. Teil: Kürze, wenn möglich.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zähler | Nenner | Bruch | Korrektur |  | *a* | *b* | Bruch | Korrektur |
| 18 + 4*x* | 2*x* |  |  | 6*x* - 3 | 2*x* - 1 |  |  |
| -49*x* | 14*x* |  |  | 15 | 3 + *x* |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

2. Teil: Berechne Produkt  bzw. Quotient  und kürze das Ergebnis vollständig.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* | *b* | *c* | *d* | Ergebnis | Korrektur |
| Prod. | 3 – *x* | 4 | 7 | 2*x* |  |  |
| Quot. | -10 | *x* | 4 | 3*x* |  |  |
| Prod. | 5 | 9*a* | 6*a* | *a* + 1 |  |  |
| Quot. | 7*a* | 5 + *b* | *a* | 10 + 2*a* |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

3. Teil: Berechne die Summe  und kürze das Ergebnis vollständig.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *c* | *d* | Ergebnis | Korrektur |
| 1 | 5*x* | -2 | *x* |  |  |
| 14 | 9*x* | 3 | 2*x* |  |  |
| 7 | 5 | 3 | *x* + 4 |  |  |
| 3 | 3*x* + 7 | -2 | 1 |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

4. Teil: Löse die Bruchgleichungen.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Ergebnis | Korrektur |  |  | Ergebnis | Korrektur |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

*Richtige: \_\_\_\_\_ von 4*

## Vertiefungseinheit – Bruchterme anschaulich: von der Wertetabelle zum Funktionsgraphen

Die folgende Einheit hat vertiefenden Charakter und geht inhaltlich über den KLP hinaus.

### Zentrale Lernaufgabe

1. Teil der Aufgabe (ohne Hilfsmittel)

a) Fülle die folgende Wertetabelle ohne Benutzung eines Hilfsmittels aus:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -2 | -1 | 0 |  | 1 |  | 2 |  | 3 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 |

b) Zeichne den Graphen der durch  definierten Funktion und beschreibe seine Form.

Gib, wenn möglich, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

c) Bestimme x so, dass . Wiederhole die Aufgabe mit .

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. Teil der Aufgabe

Die folgenden Aufgaben sollen mit einem geeigneten Hilfsmittel (z.B. Multirepräsentationssystem) bearbeitet werden.

d) Finde weitere Funktionsterme der Gestalt , die bei  eine Definitionslücke bzw. eine zur y-Achse parallele Asymptote haben.

Gib, wenn möglich, auch Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und weitere Asymptoten an.

Erzeuge auch gezielt Beispiele mit anderen Asymptoten.

Zur Vertiefung:

e) Definiere durch  eine Funktion. Zeige, dass .

Nutze die Umformung, um Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen und Asymptoten auf unterschiedliche Weise zu begründen.

### Ziel der Sicherung

Das Einsetzen in einen Bruchterm wird in a) hilfsmittelfrei geübt. Die graphische Darstellung in b) dient zur Kontrolle, schafft Übersicht und vertiefende Einsicht in einen Graphen, der im Vergleich zum Fall  als verschobene Hyperbel wahrgenommen wird. Den Streckfaktor 3 kann man als deutliche Verzerrung wahrnehmen.

In der Sicherung zu b) sollte die Asymptote  bei der Beschreibung des Graphen ebenso zur Sprache kommen wie die analoge Rolle der x-Achse, die zugleich eine Lücke im Wertebereich aufzeigt. Dies ermöglicht eine ertragreichere Untersuchung von weiteren Graphen im 2. Teil der Aufgabe. In diesem Zusammenhang wird auch der Begriff des Definitionsbereichs eingeführt und mit der Visualisierung der zur y-Achse parallelen Asymptote verknüpft. Der mathematische Bedeutungsgehalt des bloßen Verbotes der Division durch 0 ist geringer einzustufen als das anschaulich formulierte „Entschwinden im Unendlichen“.

Die Rückwärtsaufgabe  in c) kann durch Erweitern  und einen direkten „Nennervergleich“ gelöst werden oder bereits durch eine systematische Strategie der „Nennerbeseitigung“.

Ein kognitiver Konflikt wird durch  erzeugt, wo diese Strategien versagen. Zugleich wird der Zusammenhang zwischen dieser „Lücke“ und der Asymptote  erkennbar. Festzuhalten ist, dass eine Zahl ungleich null durch Teilen niemals null werden kann. Diese Regel ist im Vergleich zum Divisionsverbot durch 0 eher unbekannt und wird noch in der Oberstufe damit vermischt.

In d) können auf der Grundlage der erfolgten Begriffsbildung am Beispielmaterial induktiv die Asymptoten  und  herausgearbeitet werden. Die Untersuchung wird durch die Rechnernutzung effizienter und nachhaltiger. Eine Formalisierung mittels der Parameter a, b, c, d ist nicht erforderlich.

In der Vertiefung e) ist es möglich, die Eigenschaften des Graphen von g aus denen von f durch Deutung der Addition von 1,5 als Verschiebung nach oben abzuleiten. Dieser Gedanke greift auf ein ähnliches Vorgehen bei linearen Funktionen zurück; dort war allerdings die Verschiebung zugleich als y-Achsenabschnitt zu deuten, während sie hier den y-Achsenabschnitt von -1,5 auf 0 verschiebt.

Literaturverzeichnis

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2019). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I, Gymnasium in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (Sekundarstufe l - Gymnasium, Richtlinien und Lehrpläne, Bd. 3401). Frechen: Ritterbach-Verlag.

1. sogenannte Möbius-Transformationen [↑](#footnote-ref-1)
2. MSB, Kap 2.2, S.19: „Die Schülerinnen und Schüler beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung.“ [↑](#footnote-ref-2)