

Ministerium für Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein - Westfalen

Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

Zahlen und Operationen – „Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel“



Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes
Nordrhein-Westfalen

I. Übersicht: Mathematik

Bereich: Zahlen und Operationen

Lernaufgabe: Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

Bereich des Faches: Umgang mit Zahlen und Operationen

Leitidee:

Auf der Grundlage tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen sowie verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien

Kompetenzerwartung

Kompetenzerwartung

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten) (**Argumentieren**)
- halten Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest (**Darstellen/Kommunizieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen) (**Zahlenrechnen**) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze (...) bei allen vier Grundrechenarten für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

Inhalt:

Strukturen für beziehungshaltiges Rechnen nutzen

Anforderungsbereiche: Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

Lernaufgabe/Lernarrangement:

Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

Vertiefung des Wissens:

Vierersummen an anderen Zahlentafeln

Bestimmung der Summe aller Zahlen des gegebenen 4x4-Quadrates aus der Hundertertafel

Anwendungszusammenhang:

aufgabenbezogene Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe beim vorteilhaften Rechnen

Raumorientierung und Raumvorstellung:

Die Schülerinnen und Schüler bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher.

Überprüfung der Kompetenzen:

informative Aufgaben (165 + 99)

Variation der Aufgaben (z. B. Summe der Eckzahlen beim 3x3-Quadrat)

Beobachtung einzelner Schülerinnen und Schüler beim Legen der Plättchen
mündliche Erläuterungen zu einzelnen Überlegungen

Forscherauftrag

Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen, Ausprobieren

Sozialform:

Einzelarbeit, Partnerarbeit

Medien:

Blatt mit Arbeitsauftrag
durchsichtige Plättchen
Vorlage zum Forschen
Vorlage zum Eintragen gefundener Lösungen

Kenntnisse/Fertigkeiten:

verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100 (geben die Zahlensätze des kleinen Einspluseins automatisiert wieder)

lösen Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien

kennen die Struktur der Hundertertafel
entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen mit eigenen Worten

Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

finden vier Zahlen mit der Summe 70 probierend (AB I)
nutzen beim Lösen Zerlegungsstrategien und Zahlbeziehungen (AB II)
nutzen geometrische Muster beim Ausmalen der Felder für Vermutungen bzgl. weiterer Lösungen (AB II)
konstruieren weitere Lösungen mithilfe des Gesetzes von der Konstanz der Summe (AB III)
beschreiben ihre Entdeckungen und Vorgehensweisen (AB III)

Übergreifende Kompetenzen:

Strukturieren und Darstellen: Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung ihre Erkenntnisse bzgl. der Nutzung von Mustern oder gegensinniger Verschiebungen.

Arbeits- und Sozialverhalten:

Selbstständigkeit: Schülerinnen und Schüler arbeiten konzentriert, auch über einen längeren Zeitraum. setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein
beobachten und reflektieren Lernwege und Lernfortschritte. greifen Beiträge und Vorschläge anderer auf

II. Aufgabenbeispiel

Mathematik

Bereich: Zahlen und Operationen

Klasse: 2/3

Schwerpunkt: Zahlenrechnen

Vorhaben: Gleiche Summen im 4 x 4-Quadrat an der Hundertertafel suchen

Titel der Lernaufgabe: Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

Kompetenzen

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Struktur der Hundertertafel
- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100
- verfügen über Rechensicherheit beim Zahlenrechnen im ZR bis 100
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen

Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (reflektieren und überprüfen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- Bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern) (**Argumentieren**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (begründen) (**Argumentieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additionsaufgaben im ZR bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

Übergreifende Kompetenzen

Strukturieren und Darstellen: Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung ihre Erkenntnisse bzgl. der Nutzung von Mustern oder gegensinniger Verschiebungen.

Sachinformation

Erkundungen an der Hundertertafel gehen weit über bloße Orientierungsübungen hinaus. Durch operative Verknüpfungen (insbesondere Addition) des Zahlenmaterials ergeben sich – je nach Lage der verwendeten Zahlen – oft überraschende Rechenmuster, die erforscht werden können. Aufgabenbeziehungen können entdeckt, Gesetzmäßigkeiten erkannt werden.

In der vorliegenden Aufgabenstellung steht das Zahlenmaterial des linken oberen 4 x 4-Quadrats aus der Hundertertafel zur Verfügung. Die Zahlen sind wie in der Hundertertafel angeordnet: Spaltenweise unterscheiden sie sich jeweils um 10, zeilenweise jeweils um 1.

In dem Quadrat sind 4 Zahlen „belegt“, die zusammen die Summe 70 ergeben. Weitere 4 Summanden mit der Summe 70 sollen gefunden werden. Die vier Einer müssen sich immer zu 10 ergänzen, die vier Zehner zu 60. Da keine Zehnerüberschreitung verlangt wird, lassen sich die vier Summanden relativ leicht im Kopf (ggf. mit unterstützenden Zwischennotationen) lösen.

Die regelmäßige Struktur des Zahlenquadrates legt das Nutzen von Gesetzmäßigkeiten nahe: Wenn ein Plättchen um 1 Feld (2, 3 Felder) nach unten (+10, +20, +30) verschoben wird, muss ein anderes Plättchen „als Ausgleich“ um 1 Feld (2, 3 Felder) nach oben (-10, -20, -30) verschoben werden. Ähnliches gilt für Verschiebungen in den Zeilen: nach rechts: +1 (+2, +3), nach links: -1 (-2, -3). Das Gesetz von der Konstanz der Summe kommt hierbei zum Tragen.

Insgesamt gibt es 68 Lösungen. Diese sind in der unteren Zusammenstellung systematisch aufgeführt.

Betrachtet man die verschiedenen Lösungen, kann man erkennen, dass sich einige durch Spiegelungen oder Drehungen aufeinander abbilden lassen, z. B.

1			4
	32	33	

an der waagerechten
Symmetrieachse gespiegelt

	2	3	
31			34

1			
		13	
		23	
		33	

an der senkrechten
Symmetrieachse gespiegelt

			4
	12		
	22		
	32		

1			
		13	
		23	
		33	

jeweils
um 90°
gedreht

			4
21	22	23	

	2		
	12		
	22		
			34

	12	13	14
31			

Werden diese geometrischen Muster erkannt, können auch geometrische Operationen zur Lösungsfindung genutzt werden. Aus einer Lösung lassen sich zumeist durch Drehung und Spiegelung weitere finden.

Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
AB I: Reproduzieren	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler beherrschen die Grundrechenart Addition und lösen Plusaufgaben im Zahlenraum bis 100 fehlerfrei. Sie lösen einzelne Aufgaben probierend und erkennen, ob einzelne Summanden erhöht oder erniedrigt werden müssen.
AB II: Zusammenhänge herstellen	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler nutzen beim Lösen Zerlegungsstrategien und Zahlbeziehungen (z. B.: Alle 4 Einer müssen zusammen 10 ergeben; es dürfen nur höchstens 2 Summanden an der Zehnerstelle eine 3 haben,...). Sie nutzen geometrische Muster für Vermutungen bzgl. weiterer Lösungen und überprüfen diese (z. B.: Wenn die Zahlen in der einen Diagonale 70 ergeben, gilt das evtl. auch für die andere Diagonale).
AB III: Verallgemeinern und Reflektieren	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln aufgrund erkannter Gesetzmäßigkeiten (Gesetz von der Konstanz der Summe) eine Strategie, um gezielt zu weiteren Lösungen zu gelangen. Sie beschreiben ihre Entdeckungen und Vorgehensweisen.

Ausgestaltung der Lernaufgabe

Vierersummen an der Hundertertafel

Britta wählt sich folgendes Zahlenquadrat aus der Hundertertafel aus. Sie legt durchsichtige Plättchen auf die 4 Eckzahlen und addiert sie.

	2	3	
11	12	13	14
21	22	23	24
	32	33	

Als Summe erhält sie 70.

Forscherauftrag

- Suche andere Möglichkeiten, die Summe 70 mit immer 4 Plättchen zu legen.
Halte deine Lösungen jeweils so fest:

1			4
31			34

- Hast du beim Forschen entdeckt, wie du viele Lösungen ganz einfach finden kannst?
Schreibe deine Entdeckungen auf.

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

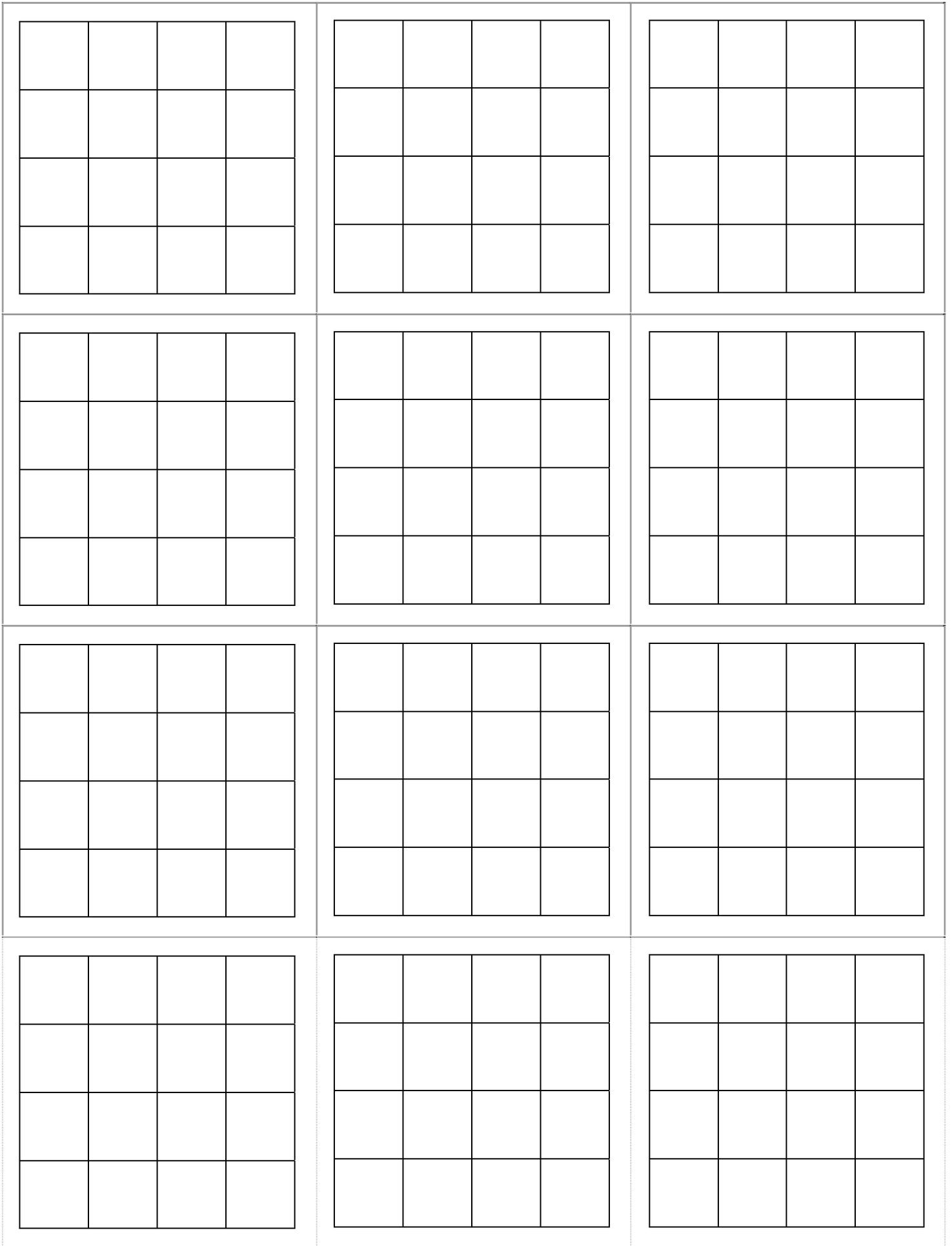
1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34



Erwartete Lernergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler bilden aus dem vorgegebenen Zahlenmaterial eines Ausschnitts aus der Hundertertafel Aufgaben mit vier Summanden zur Summe 70. Dabei belegen sie immer die 4 Zahlen der 4 x 4 Zahlentafel mit ihren Plättchen und halten ihre Lösungen in Leerformaten fest. Ggf. sortieren sie ihre Lösungen nach bestimmten geometrischen Mustern.

Während der Lösungssuche entwickeln sie mehr oder weniger systematische, zielgerichtete Vorgehensweisen.

Die Schülerinnen und Schüler tauschen sich über ihre Vorgehensweisen und Entdeckungen aus.

Sie versprachlichen wesentliche Erkenntnisse und nutzen sie ggf. für die Suche nach weiteren möglichen Lösungen.

Hinweise zum Unterricht

Im Rahmen z. B. eines „Forscherauftrags der Woche“, kann das Arbeitsblatt ohne große Vorbereitung ausgeteilt werden. Ggf. kann noch gemeinsam mit den Kindern besprochen werden, was an der Zahlentafel auffällt, um so ein strukturierendes Wahrnehmen anzuregen.

Die Kinder sollten auf jeden Fall angehalten werden, die Plättchen zu benutzen, um damit immer zuerst „probeweise“ mögliche Lösungen zu legen. Diese müssen selbstverständlich immer erst überprüft werden, ehe sie in die einzelnen Leerformate eingetragen werden.

Nicht alle Kinder haben Lust, die vier beschrifteten Lösungsfelder auch immer noch auszumalen; oft reicht es ihnen lediglich die 4 Summanden einzutragen, vor allem dann, wenn sie bereits vorausschauend „mit Zahlenblick“ arbeiten. Das zusätzliche Ausmalen kann vor allem denjenigen Kindern helfen, die noch recht unsystematisch ausprobieren; sie können dadurch angeregt werden, auf geometrische Aspekte (Lagebeziehungen, Spiegelungen) zu achten und ihre Lösungszettel ggf. nach „verwandten“ oder „ähnlichen“ Mustern zu sortieren.

Es sollte den Kindern freigestellt werden, wie viele Lösungen sie finden möchten. Um allerdings eine gezieltere Vorgehensweise zu entwickeln und Zahlbeziehungen oder geometrische Muster zu nutzen, müssen in der Regel mindestens 6 – 8 Aufgaben berechnet werden. Manche Kinder geraten sogar in einen regelrechten „Rausch“, vor allem wenn sie durch gegensinnige Verschiebungen schnell zu immer neuen Lösungen gelangen.

Haben die Kinder diese Strategie erkannt und mündlich benannt und/oder in ihr Lernstagebuch eingetragen, ist das Ziel des vorliegenden Forscherauftrags erreicht.

Ein ausgiebiger Austausch über die individuellen Vorgehensweisen sollte sich auf jeden Fall anschließen, denn nicht alle Kinder werden Zusammenhänge erkannt und Strukturen genutzt haben. Dies kann im Klassenverband oder in der Kleingruppe geschehen. Der Austausch innerhalb der Gruppe sollte strukturiert werden. Hierzu stellen sich die Kinder zunächst nacheinander vor, wie sie vorgegangen sind und was sie dabei herausgefunden haben. Sodann überlegen sie: Welche Vorgehensweisen in der Gruppe sind ähnlich? Um sicherzustellen, dass die einzelnen Kinder die Ideen

ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler verstanden haben, sollten sie diese noch einmal mit eigenen Worten wiederholen.

Insbesondere die Kinder, die die Strategie des gegenseitigen Veränderns einzelner Summanden nicht selbstständig entwickelt bzw. nachvollzogen haben, sollten noch einmal auf konkret-handelnder Ebene Gelegenheit erhalten, durch Verschieben der Plättchen einige weitere Lösungen zu finden. Das Vorgehen kann noch einmal mithilfe von Pfeilen dargestellt, das zugrunde liegende Gesetz von der Konstanz der Summe durch die Notation von Gleichungen verdeutlicht werden.



$$1 + 4 + 31 + 34 = 70$$

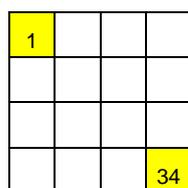
$$2 + 4 + 31 + 33 = 70$$

$$1 + 4 + 31 + 34 = 70$$

$$11 + 4 + 31 + 24 = 70$$

Hinweis zur Differenzierung:

Sollten in der Lerngruppe – z. B. im Rahmen des GUs – einige Kinder mit der Anforderung, vier Zahlen zu addieren, überfordert sein, kann diesen Kindern der Auftrag gegeben werden, lediglich Zweiersummen zu berechnen. Dabei kann von folgendem Ausgangs-Quadrat ausgegangen werden:

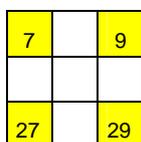


Summe: immer 35

Auch hierbei lassen sich Lage- und Zahlbeziehungen sowie das gegenseitige Verschieben der Plättchen nutzen.

Vertiefung des Wissens:

Die Schülerinnen und Schüler können Vierersummen an anderen 4 x 4-Ausschnitten der Hundertertafel berechnen. Denkbar ist hierbei auch ein 3 x 3-Quadrat, bei dem andere geometrische Muster gefunden werden können.



Die Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe kommt bei zahlreichen Aufgabenformaten zum beziehungshaltigen Üben zum Tragen, z. B. bei strukturierteren Aufgabenfolgen („Entdeckerpäckchen“) mit immer gleichem Ergebnis.

Material

- 1 Arbeitsblatt mit dem Forscherauftrag
- 1 Vorlage zum Forschen; sechs 4 x 4-Quadrate für jeweils 6 Schüler
- 1 Vorlage zum Eintragen gefundener Lösungen
(Die einzelnen Quadrate sollten ausgeschnitten und den Kindern einzeln zur Verfügung gestellt werden. Dies setzt die Kinder zum einen nicht unter Druck, möglichst auch 12 Lösungen zu finden, zum anderen haben sie die Möglichkeit, ihre Lösungsfelder nach „verwandten“ Mustern zu sortieren.)
- je 4 durchsichtige runde Plättchen pro Kind
(Sollten keine durchsichtigen Plättchen vorhanden sein, ist es ratsam, aus bunter Folie – z. B. Prospekthüllen – kleine quadratische Felder zuzuschneiden.)

Anhang

Zusammenstellung aller möglichen Lösungen:

1	2		
		33	34

1		3	
	32		34

1			4
31			34

1			4
	32	33	

1			
11			
			24
			34

1			
	12		
		23	
			34

1			
	12		
			24
		33	

1			
		13	
	22		
			34

1			
		13	
		23	
		33	

1			
		13	
			24
	32		

1			
			14
21			
			34

1			
			14
	22		
		33	

1			
			14
		23	
	32		

1			
			14
			24
31			

1			
	22	23	24

	2	3	
31			34

	2	3	
	32	33	

	2		4
31		33	

	2		
11			
		23	
			34

	2		
11			
			24
		33	

	2		
	12		
	22		
			34

	2		
	12		
		23	
		33	

	2		
	12		
			24
	32		

	2		
		13	
21			
			34

	2		
		13	
	22		
		33	

	2		
		13	
		23	
	32		

	2		
		13	
			24
31			

	2		
			14
21			
		33	

	2		
			14
	22		
	32		

	2		
			14
		23	
31			

	2		
21		23	24

		3	4
31	32		

		3	
11			
	22		
			34

		3	
11			
		23	
		33	

		3	
11			
			24
	32		

		3	
	12		
21			
			34

		3	
	12		
	22		
		33	

		3	
	12		
		23	
	32		

		3	
	12		
			24
31			

		3	
		13	
21			
		33	

		3	
		13	
	22		
	32		

		3	
		13	
		23	
31			

		3	
			14
21			
	32		

		3	
			14
	22		
31			

		3	
21	22		24

			4
11			
21			
			34

			4
11			
	22		
		33	

			4
11			
		23	
	32		

			4
11			
			24
31			

			4
	12		
21			
		33	

			4
	12		
	22		
	32		

			4
	12		
		23	
31			

			4
		13	
21			
	32		

			4
		13	
	22		
31			

			4
			14
21			
31			

			4
21	22	23	

11	12	13	
			34

11	12		14
		33	

11	12		
		23	24

11		13	14
	32		

11		13	
	22		24

11			14
21			24

11			14
	22	23	

	12	13	
21			24

	12	13	
	22	23	

	12	13	14
31			

	12		14
21		23	

		13	14
21	22		

Es gibt 68 Lösungen.