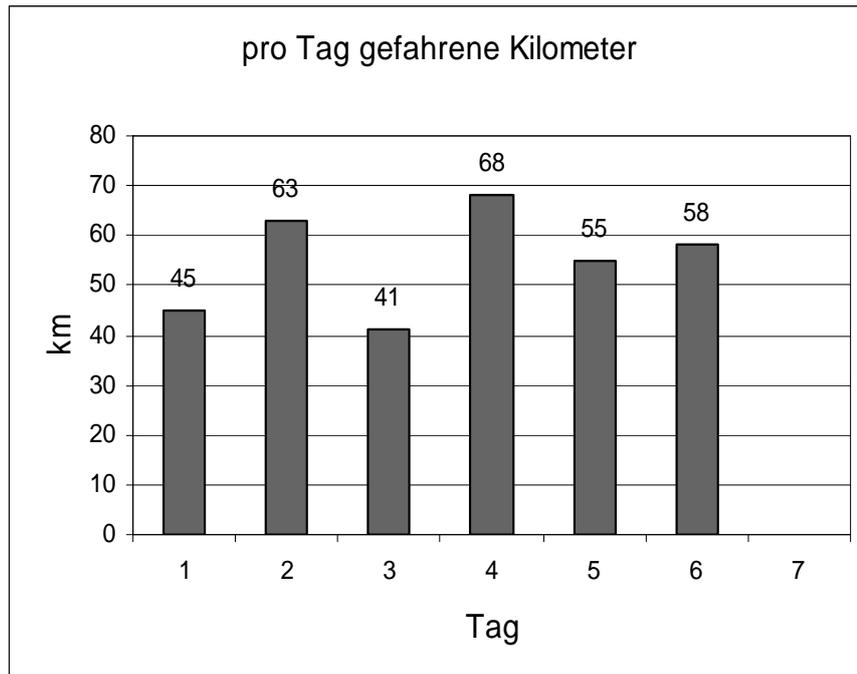


## Arbeitsblatt: Fehlende Wertepaare

### Aufgabe: Fahrradtour

(mod. n. VerA 8, IQB 2011)

Max und Julia haben in den Ferien eine Radtour von Passau nach Wien unternommen.  
Die Längen ihrer Tagesetappen hat Julia in diesem Säulendiagramm dargestellt.



**a)**

Berechne mit den Angaben aus dem Diagramm die in den ersten sechs Tagen durchschnittlich gefahrenen Kilometer von Max und Julia und zeichne den Wert in das Diagramm ein.

**b)**

Max sagt: „Am letzten Tag sind wir nur 20 km gefahren. Dadurch ist unser Schnitt deutlich gesunken.“

Zeichne den neuen Durchschnittswert ebenfalls in das Diagramm ein.

Gib an, um wie viel Prozent ihr Schnitt zurückgegangen ist.

**c)**

Nenne einen Grund, warum Julia die letzte Säule nicht eingetragen hat.

## Lösungen und didaktischer Kommentar

|    |   |
|----|---|
| a) | 55 km   |
| b) | 50 km; Rückgang um ca. 9%                       |
| c) | Sie möchte einen sportlicheren Eindruck machen. |

In dieser Aufgabe geht es um statistische Daten, deren graphische Darstellung und den „Gesamteindruck“. Dieser wird hier über das arithmetische Mittel quantifiziert.

Zunächst muss der Begriff „durchschnittlich“ im Text als wichtig erkannt werden. Die anschließende Deutung dieses Begriffs liefert einen zentralen Hinweis auf das Modell „Bildung des arithmetischen Mittels“. Die erforderlichen Daten sind dem Diagramm und dem Text zu entnehmen. Das gesuchte arithmetische Mittel muss berechnet und schließlich im Kontext Fahrradtour gedeutet werden.

In c) wird die Anfälligkeit des arithmetischen Mittels für Ausreißer thematisiert.

### Anregungen für den Unterricht

Im Unterricht kann das arithmetische Mittel neben seiner rechnerischen Behandlung unterstützend visualisiert und gedeutet werden. Dabei liegt je nach Aufgabenstellung ein Bezug zur Aufteil- oder zur Ausgleichs-Vorstellung nahe. Oft wird in den Medien mit einem Durchschnitt oder mit einem Mittel argumentiert. Dies legt es nahe, im Unterricht einen Beitrag zu einem kritischen Umgang mit Mittelwerten zu leisten und begleitend so auch das statistische Denken zu fördern. Insbesondere eine kritische Betrachtung des arithmetischen Mittels bietet sich an, um der häufigen Fehlvorstellung, dass das Mittel „in der Mitte“ einer Datenmenge liegt, entgegenzuwirken. Weiterhin kann die Aussagekraft eines Mittelwertes thematisiert werden.

Am Beispiel von Teilaufgabe a) kann die Aufteil-Vorstellung vom arithmetischen Mittel vertieft werden. Dazu müssen alle sechs bzw. sieben Teilstrecken gedanklich aneinandergelegt werden, um dann zu überlegen, wie diese Gesamtstrecke neu aufzuteilen wäre, damit alle Teilstrecken gleich lang sind. Soll hingegen die Ausgleichs-Vorstellung reaktiviert werden, muss man bei den langen Tagesetappen gedanklich so viel wegnehmen und dies gleichzeitig bei den kürzeren Etappen hinzufügen, dass schließlich alle Tagesetappen gleich lang sind.

### Weiterführende Aufgabe

In einer Erweiterung dieser Aufgabe kann die Ausreißeranfälligkeit des arithmetischen Mittels weiter thematisiert werden. In einem ersten Schritt kann dazu geprüft werden, wie viele Werte kleiner und wie viele Werte größer als das errechnete arithmetische Mittel sind. So lässt sich anschaulich problematisieren, ob die Daten symmetrisch um dieses Mittel streuen. Dies liefert auch die Einsicht, dass das arithmetische Mittel nicht notwendig auch ein Datum der gegebenen Datenmenge ist. Diese Einsicht kann durch eine Gegenüberstellung mit dem Median als weiterem Mittelwert vertieft werden. Dazu muss man die Datenmenge zunächst der Größe nach ordnen. Interpretiert man den Median als Mitte der geordneten Datenmenge (hier z. B. der nach aufsteigender Länge geordneten Tagesetappen), so teilt er diese – wieder anschaulich gesprochen – in zwei gleich große Hälften.

Hat man beide Mittelwerte zur Verfügung, kann man die Ausgangsdaten schrittweise verändern und jeweils beobachten, wie sich die beiden Mittelwerte verhalten. Bei diesem Verändern der Daten kann man z. B. die längste (oder die kürzeste) Tagesetappe weglassen und prüfen, ob das arithmetische Mittel bzw. ob der Median sich verändert. Entsprechend kann man die längste Tagesetappe durch einen großen Extremwert ersetzen, was dazu führt, dass der Median zwar gleich bleibt, aber das arithmetische Mittel nach oben wandert.

Als Erweiterung der Fragestellung und um die Aussagekraft des arithmetischen Mittels besser zu verstehen, kann erarbeitet werden, dass das arithmetische Mittel eine Re-

duzierung mehrerer Daten auf einen mittleren Wert bedeutet. Mit dieser Reduzierung geht immer auch ein Informationsverlust einher. Um dies zu verdeutlichen, können u. a. Aufzeichnungen von den Wetterdaten eines Monats betrachtet werden. Diese sind regelmäßig in Tageszeitungen zu finden. Heißt es beispielsweise, dass es im August eines Jahres durchschnittlich  $20^{\circ}\text{C}$  warm war, so sagt dies noch nichts über die Temperaturen an den einzelnen Tagen aus. Folglich kann man von diesem Mittelwert ausgehend nicht notwendig auf die Ausgangsdaten zurück schließen (Grundidee: Mittelwert als Schätzer für einen Datensatz). So kann es an einem Tag  $35^{\circ}\text{C}$  warm gewesen sein, während es an einem anderen Tag in diesem Monat nur  $15^{\circ}\text{C}$  warm war. Schließlich können Schülerinnen und Schüler anhand solcher Kontexte erfahren, dass nur die Ausgangsdaten deren Variabilität erkennen lassen und man zumindest qualitativ die Spannweite (oder die Streuung) kennen müsste, um die Aussagekraft eines Mittelwertes besser einschätzen zu können.

Weitere Kontexte, die sich für solche Betrachtungen anbieten, sind (überschaubare) Einkommensstatistiken oder auch Daten über den Benzinverbrauch eines PKW.

Beide Aspekte (Ausreißeranfälligkeit und Aussagekraft) zeigen exemplarisch, dass die Wahl eines mathematischen Modells immer nur unter Beachtung des Kontextes eingeschätzt und bewertet werden kann. Dies wird durch einen flexiblen Umgang mit den Daten begünstigt. Dabei ist zu beachten, dass die Deutung von Daten stets von der Perspektive abhängt, wie im vorliegenden Beispiel schon gut im Einleitungstext deutlich wird.