

Aufgabenbeispiel: Mittelwert (arithmetisches Mittel) 1
Jahrgangsstufe: 7

Aus:

Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur (Hrsg.)

Kompetenzorientierte Diagnose

Aufgaben für den Mathematikunterricht

Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2006-02-01

S. 60 - 65

Aufgabe Mittelwert (arithmetisches Mittel) 1

Hinweis: Der exakte Begriff „arithmetisches Mittel“ wird nicht an allen Schulen verwendet.

Die folgenden Aufgaben müssen daher den Schülerinnen und Schülern in der ihnen vertrauten Terminologie präsentiert werden.

1. a) Berechne das arithmetische Mittel der folgenden Zahlen: 37; 39; 42; 42; 43; 45
Alternative Formulierung: Berechne den Mittelwert der folgenden Körpergewichte:
...
b) Schreibe ausführlich auf, wie du das arithmetische Mittel bei a) berechnet hast.

2. Eine Reihe von vier Zahlen hat den Mittelwert (arithmetisches Mittel) 8.
 - a) Schreibe eine mögliche Reihe von Zahlen auf.
 - b) Kira hat schon drei Zahlen für diese Reihe aufgeschrieben: 4; 6; 9;
Ergänze die fehlende Zahl und beschreibe deinen Lösungsweg.

3. Ayse behauptet: Die Summe von vier Zahlen, deren arithmetisches Mittel 8 ist, beträgt immer 32. Hat Ayse Recht? Begründe!

Hinweise zur Aufgabenstellung

Mit der Aufgabe „Mittelwert“ sollen Informationen darüber gewonnen werden, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler im Bereich des Berechnens von Mittelwerten (arithmetischen Mitteln) verfügen.

Grundsätzlich ist die exakte Formulierung arithmetisches Mittel nicht bei allen Schülerinnen und Schülern zu erwarten, denn sie macht ja erst in Abgrenzung zu anderen Mittelwerten (z. B. geometrisches Mittel) einen Sinn. Daher müssen die Aufgabenstellungen so präsentiert werden, wie sie den Schülerinnen und Schülern vertraut sind.

In Aufgabe 1 wird dabei eine Hilfe für die Schüler angeboten, wenn die Zahlenangaben durch konkret vorstellbare Größen veranschaulicht werden. Mittlere Größe oder mittleres Gewicht sind den Schülerinnen und Schülern vertrauter als der abstrakte Mittelwert von Zahlen.

Ein zentrales Anliegen der Diagnoseaufgaben ist es, zu erfahren, wie Schülerinnen und Schüler zu Ergebnissen kommen. Daher bietet die Einstiegsaufgabe (1a)) nur sehr geringe Diagnosemöglichkeiten, weil hier lediglich ein Ergebnis abgefragt wird. Welche Fehlvorstellungen hinter einem falschen Ergebnis liegen lässt sich häufig nicht ermitteln. Folgerichtig wird in Aufgabe 1b) nach einer Beschreibung gefragt, wie das Ergebnis ermittelt wurde.

Die Zahlen sind wieder so gewählt, dass sie sich leicht als Körpergewichte [in kg] interpretieren lassen.

Aufgabe 2 könnte – je nach Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler – in den Bereich des Problemlösens hineinragen. Wenn die Schülerinnen und Schüler die Umkehraufgabe zum Mittelwert nicht behandelt haben, so stellt diese Aufgabe eine solche Anforderung. Dabei ist 2a) auch durch die triviale Antwort: 8; 8; 8; 8 zu lösen. Wegen dieser Lösungsoffenheit ist diese Aufgabe einfacher als der Teil b), in der vom Bearbeiter eine Strategie verlangt wird, die ihn zur fehlenden Zahl führt. Möglich sind hier verschiedene Lösungswege – etwa formal über die Lösung einer entsprechenden Gleichung, aber auch inhaltlich über die z.B. sprachlich gestützte Formulierungen: „Von 4 bis zum Mittelwert fehlen 4 und von 6 zur 8 fehlen 2. Insgesamt fehlen also 6. Auf der anderen Seite ist die 9 um 1 größer als 8. Daher fehlen insgesamt 5 um den Mittelwert zu erreichen: Also muss die fehlende Zahl 13 sein.“

Eine solche Antwort zeigt viel vom Denken der Schülerinnen und Schüler.

Die Auswahl der Zahlen erfolgte dabei so, dass schon bei der Angabe der Lösung in a) Fehlvorstellungen deutlich werden, indem dann hier falsche Ergebnisse erzeugt werden.

Mit dieser Aufgabe können also Indikatoren zu unterschiedlichen Teilkompetenzen der Kernlehrpläne gewonnen werden. Eine entsprechende Zuordnung der wesentlichen Kompetenzen lässt sich etwa wie folgt vornehmen (in der Formulierung des Gesamtschulkernlehrplans):

	Schülerinnen und Schüler ...
1) und 2): Stochastik (Jg. 5/6) – mit Daten und Zufall arbeiten	
Auswerten	... bestimmen ... arithmetisches Mittel und Median
1b): und 2) Argumentieren/Kommunizieren (Jg. 5/6) – kommunizieren, präsentieren und argumentieren	
Verbalisieren	... erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln und Verfahren mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen
2): Problemlösen (Jg. 5/6 oder 7/8) – Probleme erfassen, erkunden und lösen	
5/6: Lösen	... wenden die Problemlösestrategien „Beispiele finden“, „Überprüfen durch Probieren“ an.
7/8: Lösen	... wenden die Problemlösestrategien „Zurückführen auf Bekanntes“, „Spezialfälle finden“ und „Verallgemeinern an.“
3): Argumentieren/Kommunizieren (Jg. 7/8) – kommunizieren, präsentieren und argumentieren	
Begründen	... nutzen mathematisches Wissen für Begründungen ...

Erwartete bzw. mögliche Bearbeitungen

1a) Mittelwert = $41 \frac{1}{3} = 41,3333..$

Mögliche Fehlerquellen:

Der Begriff ist unbekannt oder nicht mehr bekannt.

Es wurde eine eigene Definition des Begriffs benutzt, z.B. mithilfe der Mitte der Spannweite.

Die Formel für die Berechnung wurde vergessen.

Rechenfehler treten auf.

Zur weiteren Klärung der Fehlerquellen macht es Sinn weitere Teilaufgaben zum Thema zu verwenden, insbesondere Aufgabe 1b).

Bei dieser Aufgabe kommt es auf die Darlegung des Rechenwegs an. Hier sind eine Reihe von Lösungen möglich.

- „Ich zähle die Zahlen zusammen und teile das Ergebnis durch die Anzahl der Zahlen.“
- „ $(1,70 + 1,73 + 1,79 + 1,81 + 1,82) : 5 = 1,77$ “

In Zusammenhang mit einem fehlerhaften Ergebnis der Aufgabe 1 wird hier eine Diagnose von Fehlvorstellung durch die Äußerungen der Schülerinnen und Schüler leicht möglich.

2. a) Möglichkeiten: 8; 8; 8; 8; oder 7; 7; 9; 9; oder vielleicht: 1; 1; 1; 29

Die präsentierten Lösungen können die Tiefe des Verständnisses für den Mittelwertbegriff dokumentieren.

Bleiben die Schülerinnen und Schüler im Bereich ganzer / natürlicher Zahlen? Werden ungewöhnliche Verteilungen (siehe oben) angegeben?

b) Die richtige Lösung lautet 13.

Die Schülerinnen und Schüler können hier zeigen, dass sie die Umkehrung des Mittelwertbegriffs beherrschen. Nur dann, wenn sie den Begriff hinreichend verstanden und durchdrungen haben, ist die Lösung dieses Aufgabenteils möglich. Die Begründungen können dabei ein Maß für die Argumentationsfähigkeit sein.

3. Ayse hat Recht. Eine Begründung könnte über eine Formel zur Mittelwertberechnung erfolgen. Auch sprachliche Begründungen sind denkbar (Schülerlösungen Jg. 8):

- Ayse hat Recht, denn ich habe es ausprobiert.
- Ja, es stimmt, weil sonst ja nicht der Mittelwert 8 herauskommt. Bei 33 kommt dann ein Mittelwert von 8,25 heraus.

- Ja, denn, wenn man 32 durch die Anzahl der Zahlen in der Reihe dividiert, ergibt sich der Mittelwert 8.
- Ja, denn, wenn man $8 \cdot 4$ nimmt ergibt sich 32.
- Nein, sie hat nicht Recht. Denn die Reihe 4; 6; 9; 12 hat den Mittelwert 8 und die Summe ist 31.
- Nein, sie hat Unrecht. Gegenbeispiel: 4; 6; 9; 10

Diagnostische Informationen

Diagnostische Informationen zum Mittelwertbegriff lassen sich aus allen Teilaufgaben gewinnen.

Allerdings lässt Teilaufgabe 1a) erst in Verbindung mit Nr. 1b) eine wirkliche Diagnose zu.

Je nach angegebener Lösung lassen sich Rückschlüsse ziehen auf:

- die Kenntnis des Begriffs Mittelwert (arithmetisches Mittel),
- Rechenfertigkeiten im Bereich der Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen,
- die Fähigkeit, einen eigenen Lösungsweg für andere nachvollziehbar darzustellen.

In Teilaufgabe 2 lassen sich Schlüsse über das Problemlöseverhalten bei den Schülerinnen und Schülern ziehen, wenn diese Aufgabenstellung noch nicht im Unterricht besprochen wurde.

Je nach angegebener Lösung lassen sich Rückschlüsse ziehen auf:

- die Fähigkeit, ein eigenes Beispiel zu finden, das den Bedingungen genügt,
- die Fähigkeit, die eigenen Lösungen kritisch zu prüfen,
- die Fähigkeit, einen eigenen Lösungsweg für andere nachvollziehbar darzustellen.

In den Aufgabenteilen 3 werden Rückschlüsse über die Argumentationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler möglich. Die Lösungen zielen ab auf:

- die Fähigkeit, den Lösungsweg eines anderen nach zu vollziehen,
- ein gegebenes Ergebnis zu analysieren und zu bewerten,
- eine Begründung für ein richtiges oder ein Gegenbeispiel für ein falsches Ergebnis zu liefern,
- die Fähigkeit, ein falsches Ergebnis zu korrigieren.

Passende Fragen zur Selbsteinschätzung

Wenn Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 1) bearbeitet haben, so können sie voraussichtlich z. B. die folgenden Fragen zur Selbsteinschätzung fundiert beantworten – bzw. vor der Bearbeitung getroffene Einschätzung ggf. revidieren:

Wie sicher bist du, wenn du ...

- ... den Mittelwert berechnen sollst?
- ... deinen eigenen Lösungsweg erklären sollst?

Entsprechend könnten folgende Selbsteinschätzungsfragen bei der Bearbeitung von Aufgabe 2) angesprochen werden:

Wie sicher bist du, wenn du ...

- ... ein bisher unbekanntes Problem lösen sollst?
- ... ein eigenes Beispiel erfinden sollst?
- ... deinen eigenen Lösungsweg erklären sollst?

Analog gelten für Aufgabe 3) folgende Fragen:

Wie sicher bist du, wenn du ...

- ... den Lösungsweg eines anderen nachvollziehen sollst?
- ... eine Begründung für die Richtigkeit einer Lösung angeben sollst?
- ... begründen sollst, dass eine Rechnung falsch ist – einen Fehler in der Rechnung eines anderen finden sollst?
- ... mit Brüchen rechnen sollst?
- ... zwischen verschiedenen Mittelwerten unterscheiden sollst?

Vorschläge zum Einsatz der Aufgaben

Es ist nicht daran gedacht, alle Aufgabenteile gleichzeitig zu präsentieren. Je nach Jahrgangsstufe und unterrichtlichen Voraussetzungen kann es sinnvoll sein, der Gesamtgruppe z. B. nur die Aufgabe 2 zu geben. Anschließend wird bei den Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht angemessen lösen konnten, genauer analysiert, wo die Schwierigkeiten liegen – ob etwa der Mittelwertbegriff nicht verstanden wurde (z. B. durch die Bearbeitung von 1).

Ein anderer Fokus könnte es sein, dass die prozessbezogenen Kompetenzen (Problemlösen oder Argumentieren) analysiert werden sollen. Dann wird man etwa Aufgabe 3 einsetzen und auch hier zur Absicherung des Ergebnisses erst im Anschluss nur 1 und 2 verwenden.

Bei der Besprechung der Ergebnisse im Unterricht könnte man dann auf allgemeine Lösungsstrategien zur Problemlösung und Begründung eingehen.

- Welche Verfahren kann ich anwenden um ein Problem zu bearbeiten?
- Wo reicht ein Beispiel, wo muss eine ausführliche Begründung erfolgen?
- Bei welchen anderen Problemen kann man ähnlich vorgehen?
- Welche typischen algebraischen Fehler erkennst du?

Alternative Aufgabenstellungen

Bei der dargestellten Aufgabe werden schon verschiedene Alternativen benannt: Es ist möglich die Aufgabe 1 und 2 stärker anwendungsorientiert (mit für die Schülerinnen und Schüler leicht fassbaren Größen wie Körperlänge und -gewicht oder Durchschnittspreisen) zu präsentieren. Die Präsentation kann auch direkt auf der Ebene der Operation von Zahlen angesiedelt werden. Es ist auch möglich, die zugrundeliegenden Daten einem authentischen Text oder einer Grafik entnehmen zu lassen. Allerdings ist dann die Unabhängigkeit der Analyse der verschiedenen Kompetenzen nicht mehr gegeben: Ein Scheitern kann eventuell auf der mangelnde Lesekompetenz der Bearbeiter basieren. Eine interessante, anwendungsorientierte Darbietung findet sich in der Aufgabe „Weitsprung“ der ersten Lernstandserhebung in NRW 2004.

Weitere ähnliche Aufgaben

Aus der Aufgabe „Mittelwert“ lassen sich schnell Aufgaben ähnlichen Typs gewinnen, wenn z. B. anstelle des Mittelwertes andere statistische Größen wie der Median oder Streumaße (Spannweite, Quartile) genommen werden.

Wichtig für den Charakter der Aufgabe ist aber, dass außer einfachen Rechnungen Erläuterungen des Rechenwegs und Begründungen und Bewertungen von vorgegebenen Lösungen vorgenommen werden müssen.

Bitte beachten Sie:

1. Sofern nicht gesondert gekennzeichnet, ist alles Material in diesem Angebot urheberrechtlich geschützt und darf in keiner anderen Weise verwendet werden, als es in den allgemeinen Urheberrechtsbestimmungen auf

learn:line oder im Text der Seite genehmigt ist. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Rechte an eingestellten Beiträgen bei den Autoren verbleiben. Eine unautorisierte Veröffentlichung an anderen Orten insbesondere zu kommerziellen Zwecken ist nicht zulässig.

2. Nicht-kommerzielle Besucher dieser Seite dürfen jegliches Material nur zur privaten, nicht-kommerziellen Verwendung herunterladen. Angestellte, Agenten, Mitglieder oder andere Vertreter eines Unternehmens / einer Organisation dürfen Material von dieser Seite nur für nicht-kommerzielle Zwecke innerhalb des Unternehmens oder der Organisation herunterladen. Diese Befugnis setzt die Beachtung jeglicher urheberrechtlicher oder eigentumsrechtlicher Bestimmungen, denen das Material unterliegt, voraus.

Nachfragen / Feedback unter <http://www.sinus.nrw.de/projekt5>