

Funktionsuntersuchungen

Autoren:

Klaus Busse, Ulrich Hoffert, Ingo Koschinski, Dr. Kay Nüßler,

Gesamtschule Weierheide, Oberhausen / Gesamtschule Greven, Greven / Gesamtschule Holsterhausen, Essen

März 2015

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial
------------------	----------------------	---------------	---------------------

Kurzbeschreibung

Das hier vorgestellte Unterrichtsvorhaben zeichnet eine Möglichkeit auf Funktionsuntersuchungen in der Einführungsphase im Unterricht zu behandeln.

Dazu werden 8 Unterrichtssequenzen im Gesamtumfang von 12 Unterrichtsstunden à 45 Minuten vorgeschlagen. Die Unterrichtssequenz, die zum Üben von Funktionsuntersuchungen (in Sachzusammenhängen o. innermathematisch) wird in diesem Vorschlag nicht weiter ausgearbeitet, da hier in den letzten Jahren eine Fülle von aktivierenden Aufgaben entwickelt worden ist.

Der Schwerpunkt dieses Unterrichtsvorhaben liegt auf der Entwicklung von Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die Begriffe wie (Wende¹- und) Extrempunkte. Deshalb werden diese Begriffe zunächst qualitativ in einem sinnstiftenden Kontext (Politik-/ Wirtschaftsnachrichten) thematisiert.

Besonderes Augenmerk wird so auf die prozessbezogenen Kompetenzen *Kommunizieren* und *Argumentieren* gelegt.

Auch die Möglichkeit der selbstständigen Entdeckung von Zusammenhängen von Funktion und Ableitungsfunktionen auf der einen Seite, sowie Extrem- und Wendepunkten auf der anderen Seite und die daraus ableitbaren Bedingungen für Extrem- und Wendepunkte unterstützen diesen Aspekt.

Der *GTR* wird in den vorgestellten Materialien dazu genutzt schnell Überblicke über Graphen von Funktionen und deren Ableitungen zu bekommen.

¹ Werden im Lehrplan innerhalb der Einführungsphase nicht gefordert.

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

Std.	Thema	Material
1.	Politik-/Wirtschaftsnachrichten	M1
2.	Bedeutung Extrem-/und Wendepunkte	M2
3.	Zusammenhang besonderer Punkte	M3
4.		
5.	Bestimmung von Extrempunkten	
6.	Übungen zur Bestimmung von Extrempunkten	
7.	Bestimmung von Wendepunkten inkl. Übungen	
8.	Übungen zu Funktionsuntersuchungen (hier auch: Anwendungsprobleme)	
9.		
10.		
11.		
12.	Zusammenstellung: Punkte einer Funktionsuntersuchung	

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial
------------------	-----------------------------	---------------	---------------------

Didaktische Hinweise

Funktionsuntersuchungen werden häufig kalkülorientiert unterrichtet. Dieses reine „Abarbeiten“ eines gelernten Schemas ohne inhaltlichen Sinn² findet auch bei Schülerinnen und Schülern positiven Anklang. Auch dann, wenn man die Hintergründe nicht verstanden hat, sind sie nämlich in der Lage eine Lösung von Aufgaben durch Rückzug auf auswendiggelernte Verfahrensschritte zu erhalten.

Die Beschäftigung mit Anwendungskontexten (u.a. in Optimierungsaufgaben) zeigt Schülerinnen und Schülern den Realitätsbezug von Extremstellen auf. Die Nutzung des GTR entlastet die Schülerinnen und Schüler von aufwändigen Rechnungen und bietet über die geometrische Visualisierung eine Möglichkeit zum Aufbau von Grundvorstellungen zum Extremwertbegriff. Allerdings steht auch hier das Ableitungskalkül im Mittelpunkt.

Nach Hahn und Prediger³ liegt ein wichtiges Ziel bei der Bearbeitung von Funktionsuntersuchungen darin, die einzelnen Aspekte einer Funktionsuntersuchung „*als mathematische Konzepte zur Erfassung und Beschreibung der charakteristischen Momente von Wachstums- und Veränderungsprozessen zu begreifen und aktivieren zu können.*“

Das hier vorgestellte Unterrichtsvorhaben legt deshalb einen Schwerpunkt auf das Beschreiben und Begründen von Zusammenhängen im Rahmen einer Funktionsuntersuchung.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Struktur des Problemfeldes verstehen und in der Lage diese flexibel auf unterschiedliche Kontexte anwenden zu können.

In diesem Unterrichtsvorhaben konzentriert sich diese Erschließung der Struktur des Problemfeldes auf das Verstehen des mathematischen Konzeptes von Extrem-(und Wende-)

² Danckwerts 1992, Borneleit u.a. 2001, Bürger/Malle 200, Blum 200, S.5

³ S. Hahn, S. Prediger: Vorstellungorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative, Universität Bremen 2004

punkten. Die anderen Aspekte einer Funktionsuntersuchung sind bereits Thema in vorherigen Unterrichtsreihen gewesen und werden in den Übungsstunden entsprechend wieder aufgegriffen.

Als sinnstiftender Kontext wurden zum Einstieg Nachrichten aus Politik und Wirtschaft gewählt. Die hier genutzten offenen Aufgaben- und Fragestellungen bieten für alle Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit ihrem individuellen Leistungsstand entsprechend Antworten zu formulieren (selbstdifferenzierende Aufgaben). Damit haben alle Schülerinnen und Schüler einer Lerngruppe die Chance inhaltliche Grundvorstellung zu entwickeln.

1. Unterrichtssequenz

In dieser Unterrichtssequenz geht es darum anhand von qualitativen Kurvendiskussionen Grundvorstellungen zu entwickeln. Auf der Grundlage von Nachrichtentexten aus Wirtschaft und Politik sollen die Schülerinnen und Schüler die in den Texten enthaltenen mathematischen Zusammenhänge (Größe, Änderungsrate) beschreiben bzw. skizzieren. Begriffe wie Extrem- oder Wendestelle können hierbei für die Schülerinnen und Schüler bedeutsam werden und inhaltliche Vorstellungen aufgebaut werden⁴.

Material

Arbeitsblatt Wirtschaftsnachrichten mit der folgenden Meldung aus dem Internet (s. Anhang):

Finanzministerium des Landes Nordrhein-Westfalen 
Startseite / Presse
<p>Finanzministerium NRW</p> <p>Neuverschuldung sinkt gegenüber 2016 um 20 Prozent gegenüber dem Vorjahr</p> <p style="text-align: right;">Düsseldorf, den 10.02.15</p> <p>Die Landesregierung hat in ihrem Eckwertebeschluss für den Haushalt 2016 festgelegt, die Neuverschuldung im kommenden Jahr auf gut 1,5 Milliarden Euro zu senken – 20 Prozent oder 380 Millionen Euro weniger als im Jahr 2015. „Wir gehen mit dieser Planung den nächsten wichtigen Schritt zum ausgeglichenen Haushalt. Das schaffen wir, obwohl wir zusätzliche Aufgaben wie die Flüchtlingshilfe und die Übernahme der Schulsozialarbeit stemmen“, sagte Finanzminister Norbert Walter-Borjans. „Haushaltsausgleich und Handlungsfähigkeit bei der Erfüllung unserer Aufgaben sind kein Gegensatz, sondern beides Voraussetzungen verantwortungsbewusster Landespolitik.“</p> <p>Die Landesregierung rechnet im kommenden Jahr mit Einnahmen von 65 Milliarden Euro. Davon entfallen 50,5 Milliarden auf Steuereinnahmen, die damit gegenüber 2015 um 4,9 Prozent wachsen. Die Ausgaben steigen nach den Eckwerten um 3,7 Prozent auf 66,7 Milliarden Euro. Gegenüber den ursprünglichen Planungen sind Mehrausgaben von 350 Millionen Euro für durchlaufende Posten wie Zahlungen des Bundes für kommunale Aufgaben, von 430 Millionen Euro für Flüchtlingshilfen und 48 Millionen Euro für die Schulsozialarbeit veranschlagt.</p> <p>Die Ratingagentur Standard & Poor's hat die erfolgreiche Konsolidierung der Landesregierung bestätigt und für die „sehr starke“ Kreditwürdigkeit des Landes erneut das Rating AA- mit stabilem Ausblick verliehen.</p> <p style="font-size: small;">Finanzverwaltung NRW ©2015 ↑ Seitenanfang  Drucken</p>

⁴ s. (Hahn & Prediger, 2004)

*Funktionsuntersuchungen***Aufgaben**

- a) Lesen Sie den Artikel sorgfältig durch und klären Sie unbekannte Begriffe. Nutzen Sie dabei das Wissen ihres Nachbarn bzw. ihrer Nachbarin oder die bereitgestellten Hilfekarten.
- b) Warum wird mit dem Sinken der Neuverschuldung ein wichtiger Schritt zum ausgeglichenen Haushalt gegangen?
- c) Frau Schimmelpfennig ist nach der Lektüre dieses Artikels der Meinung, dass die Schulden des Landes NRW sinken. Was würden Sie ihr darauf antworten? Welcher Irrtum ist ihr unterlaufen?
- d) Beschreiben Sie die Veränderung der Schulden **und** der Neuverschuldung mit bekannten Begriffen aus der Analysis. Versuchen Sie beide Entwicklungen auch jeweils mit Hilfe eines möglichen Graphen zu beschreiben.

Die erwähnten Hilfekarten stehen im Anhang zur Verfügung.

Sicherung

Die Schülerlösungen der Aufgaben können anschließend im Plenum vorgestellt und diskutiert werden.

Zum Abschluss kann dann eine Sicherung mit Hilfe des Arbeitsblattes / der Folie zur „schwarzen Null“ erfolgen (in groß s. Anhang). Hier tauchen lokale Extrempunkte schon qualitativ auf und können später fruchtbar gemacht werden.

Funktionsuntersuchungen



Ausgeglichener Haushalt schon 2014
"Schwarze Null" ein Jahr früher erreicht
 Stand: 12.01.2015 17:26 Uhr

Die Bundesregierung ist im vergangenen Jahr erstmals seit 1969 ohne neue Schulden zur Finanzierung ihres Haushalts ausgekommen. Koalitionskreise bestätigten mehreren Nachrichtenagenturen einen entsprechenden Bericht des "Handelsblatts".

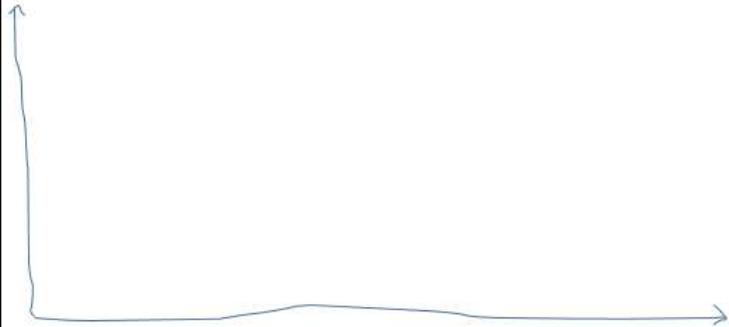
Damit erreichte Finanzminister Wolfgang Schäuble ein Jahr früher als geplant sein Ziel der "schwarzen Null". Als Gründe wurden neben anhaltend hohen Steuereinnahmen und niedrigen Zinsausgaben auch eine Milliardenzahlung der Betreiber von Atomkraftwerken aus der umstrittenen Kernbrennstoffsteuer an den Bund kurz vor dem Jahreswechsel genannt.

(Quelle: <http://www.tagesschau.de/inland/bundeshaushalt-schwarze-null-101.html>)

Fragen:

Wie würden Sie diese Nachricht erklären?

Was bedeutet diese Nachricht für die Neuverschuldungskurve bzw. der Schuldenkurve des Bundeshaushaltes?



Arbeitsblatt / Folie „schwarze Null“

Eine weitere Vertiefungs- und Sicherungsmöglichkeit bietet ein Arbeitsblatt mit einem Zeitungsartikel aus dem Weserkurier von 2006 (s. Anhang). Die damit verbundenen Aufgaben können von den Schülerinnen und Schülern auch als Hausaufgabe bearbeitet werden.

Die Aufgabe fordert Schülerinnen und Schüler auf über einen mathematischen Zusammenhang zu kommunizieren und stärkt somit die entsprechende prozessbezogene Kompetenz.

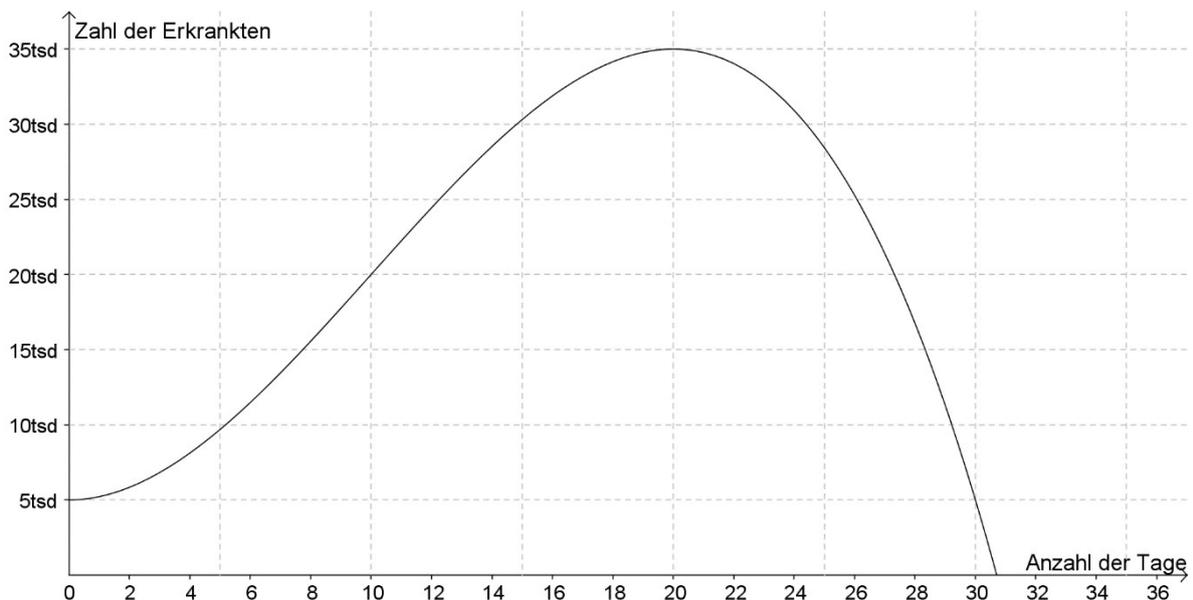
2. Unterrichtssequenz

In dieser Unterrichtssequenz sollen die Schülerinnen und Schüler zur Einführung von Funktionsuntersuchungen unterschiedliche Bedeutungen von Ableitungen, Extrem- und Wendepunkten betrachten und konkretisieren. Dies geschieht in Form eines Gruppenpuzzles, in dem insgesamt 4 unterschiedliche Beispiele (Funktionen in unterschiedlichen Sachzusammenhängen) bearbeitet werden. Einen Arbeitsplan, der auch an die Schülergruppen ausgeteilt werden kann findet sich im Anhang wieder. Ein Beispiel für den Arbeitsauftrag einer Gruppe erhalten Sie im Folgenden.

Beispielaufgabe (weitere Aufgaben s. Anhang)

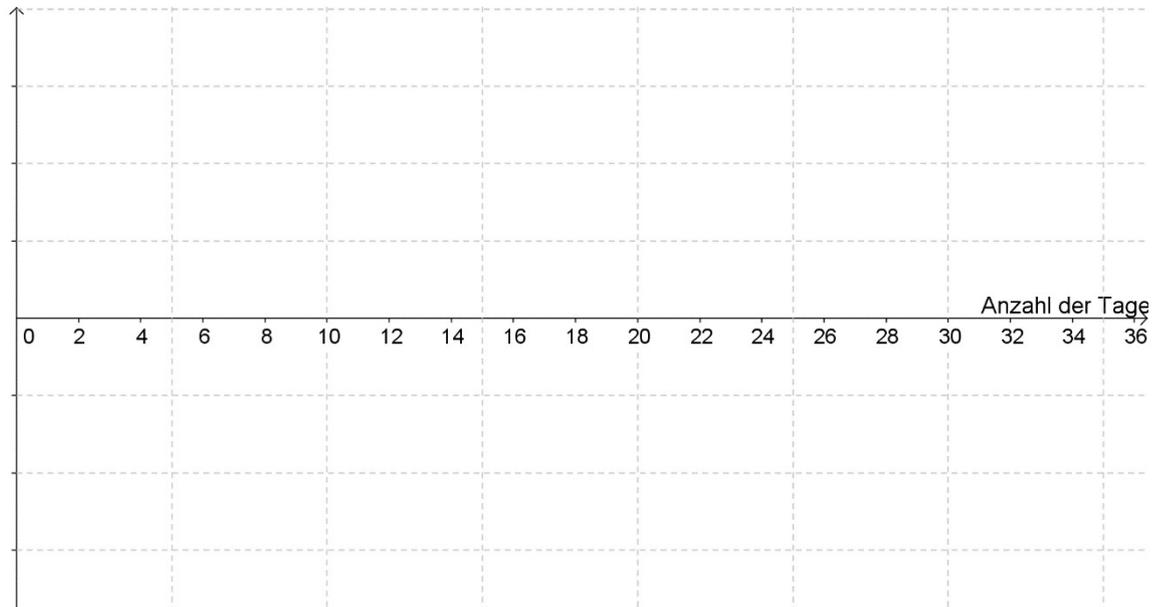
Grippeepidemie

Während einer Grippeepidemie ist eine bestimmte Zahl von Personen gerade erkrankt. Täglich erkranken neue Personen, gleichzeitig werden aber auch bereits Erkrankte wieder gesund. Das Diagramm beschreibt den Verlauf einer konkreten Grippeepidemie, zum Zeitpunkt $t=0$ sind hier 5000 Personen erkrankt.



- Beschreiben Sie den Verlauf der Grippeepidemie qualitativ (ohne Rechnung). Berücksichtigen Sie dabei folgende Fragen:
 - In welchen Zeitabschnitten stieg/ fiel die Anzahl der Erkrankten?
 - Zu welchen Zeitpunkten stieg bzw. fiel die Anzahl der Erkrankten am schnellsten?
- Skizzieren Sie nun die Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in das nachfolgende Koordinatenkreuz. Benutzen Sie dabei die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).

Funktionsuntersuchungen



- c) Beschreiben Sie nun die Änderungsrate ebenfalls qualitativ.
 - 3. Wann war sie positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
 - 4. Was bedeutet positive, negative, maximale und minimale Änderungsrate für den Verlauf der Epidemie?

- d) Übertragen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus dem Sachzusammenhang auf innermathemische Zusammenhänge, indem sie die folgende Tabelle ausfüllen:

Inhaltliche Deutung des Graphen $[f(t)]$	Inhaltliche Deutung der Ableitung $[f'(t)]$	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

Sicherung

Die Ergebnisse des Gruppenpuzzles werden von den Schülerinnen und Schülern in einer Tabelle festgehalten. Anschließend können sie diese noch einmal auf einen weiteren Sachzusammenhang anwenden (im Unterricht/als Hausaufgabe)

Funktionsuntersuchungen

3. Unterrichtssequenz

In der dieser Unterrichtssequenz untersuchen und entdecken die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen einer Funktion und deren Ableitungen in Bezug auf die Lage von Extrem- (und Wende-)punkten.

M3 Forschungsaufgabe

Wählen sie mit einer Gruppe jeweils eine der nebenstehenden Funktionen aus.

A: $f(x) = 3x^3 - 9x$

B: $f(x) = 0,5x^3 - x^2 - 6x + 2$

C: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

D: $f(x) = 0,05x^3 - 0,6x^2 + 3x + 4$

E: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$

F: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 5$

1. GRAPHEN MIT DEM GTR ZEICHNEN LASSEN

Zeichnen Sie die Graphen zu $f(x)$ und $f'(x)$ mit Hilfe des GTR in ein geeignetes Koordinatensystem.

2. FUNKTIONSGRAPHEN AUF POSTER ÜBERTRAGEN

Übertragen sie die Graphen auf ein Poster (Graph von f in blau und f' in rot). Heben Sie die „besonderen Punkte“ der Graphen von f und f' (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) durch Kennzeichnung hervor.

3. ZUSAMMENHÄNGE UNTERSUCHEN

Untersuchen Sie falls möglich nun die beiden Graphen mit Hilfe folgender Fragestellungen:

- In welchen Bereichen ist die Steigung von f positiv/ negativ?
- Kann man diese Bereiche auch mit Hilfe von f' beschreiben?
- Was passiert mit f' an der Stelle, an der f einen Hoch-/Tiefpunkt besitzt?
- Kann ich mit Hilfe von f' erkennen, ob f an der Stelle x_0 einen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt?
- Was passiert mit f' an der Stelle, an der f einen Wendepunkt besitzt?

4. ÜBERTRAGUNG DER ERGEBNISSE IN MATHEMATISCHE AUSSAGEN

Formulieren Sie Ihre Ergebnisse in allgemeingültige Aussagen (z.B.: f besitzt an der Stelle x_0 einen Hochpunkt, wenn ...). Schreiben Sie diese Aussagen auf ein DinA4-Blatt und heften Sie diese an die bereitgestellte Fläche, ebenso die Poster, auf der die entsprechenden Graphen abgebildet sind.

5. ORDNET UND SICHERN DER ERGEBNISSE

Vergleichen und diskutieren sie die gefundenen Aussagen. Ordnen Sie die Aussagen und formulieren Sie allgemeine Regeln für die Extrem- und Wendepunkte einer Funktion.

Die allgemein anerkannten und begründeten Aussagen werden schließlich im Mathematikheft festgehalten.

Sicherung

In dieser Unterrichtsreihe wird großer Wert auf das eigene Entdecken von mathematischen Zusammenhängen durch Schülerinnen und Schüler gelegt. Dies kann auch dazu führen, dass bei der Verschriftlichung von entdeckten Zusammenhängen es noch an der einen oder anderen Stelle an Präzision fehlt. Dies sollte man als Lehrkraft zunächst aushalten und erst im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe anhand von geeigneten Beispielen diese Formulierungen gemeinsam präzisieren. Geschieht das zu früh, so kann die das große motivationale Potential dieser Forschungsaufgabe nicht vollständig ausgeschöpft werden⁵.

Wie schon oben erwähnt kann auch ein Wendepunkt (wenn er schon einmal da ist) an dieser Stelle entsprechend thematisiert werden. Wenn dies nicht gewünscht wird, dann besteht die Möglichkeit dies auf dem Arbeitsblatt entsprechend zu verändern.

⁵ SINUS.NRW U. Hoffert

4. – 11. Unterrichtssequenz

In diesen Unterrichtssequenzen geht es zum einen um das Bestimmen von Extrem- und Wendepunkte, zum anderen um das Üben von Elementen einer Funktionsuntersuchung in unterschiedlichen Sachkontexten. Dies schlägt die Brücke zur Schwerpunktsetzung zu Beginn der Unterrichtsreihe.

Wie bereits in der Kurzbeschreibung erwähnt, werden aufgrund der Vielzahl von bereits erprobten und veröffentlichten guten Aufgaben für diese Zwecke an dieser Stelle keine weiteren Materialien angeboten.

12. Unterrichtssequenz

Zum Abschluss der Unterrichtsreihe sollte den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit gegeben werden alle Aspekte einer Funktionsuntersuchung zu sichern. Welches strukturgebende Element (Tabelle, Mindmap,...) hier Hilfestellung geben könnte bleibt der Lehrkraft überlassen. Im Anhang findet man eine Mindmap, die von Schülerinnen und Schülern selbstständig vervollständigt werden kann.

Beispiel für eine Mindmap:



Diagnose

Der beigefügte Selbsteinschätzungsbogen in Form einer Checkliste kann begleitend in der Unterrichtsreihe oder am Ende (z.B. zur individuellen Vorbereitung auf eine Klausur) genutzt werden.

Die im Diagnosebogen genutzten Beispielaufgaben sind bewusst einfach gehalten, damit die Schülerinnen und Schüler einen schnellen Überblick über ihre Stärken und Schwächen in Bezug auf das Verständnis der wesentlichen Aspekte der Unterrichtsreihe erhalten.

Die letzte Spalte des Selbsteinschätzungsbogens muss jeweils von der unterrichtenden Lehrkraft mit vorhandenen Aufgaben und Materialien ergänzt werden. Hier kann auch auf das Angebot von Übungsaufgaben im jeweiligen Schulbuch zurückgegriffen werden.

Funktionsuntersuchungen

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial
------------------	----------------------	----------------------	---------------------

Lehrplanbezug**Thema: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)****Zu entwickelnde Kompetenzen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler*

- leiten Funktionen graphisch ab
- nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion
- begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten
- wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an
- lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel
- verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten
- unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich
- verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.

Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben.

Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien kann durch Multiple-Choice-Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen

Funktionsuntersuchungen

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Problemlösen***Die Schülerinnen und Schüler*

- erkennen Muster und Beziehungen (*Erkunden*)
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) (*Lösen*)
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (*Lösen*)

Argumentieren*Die Schülerinnen und Schüler*

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)
- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen [...]) (*Begründen*)
- erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie (*Beurteilen*)

Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.

Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.

Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden.

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial
------------------	----------------------	---------------	---------------------

Materialanhang

M1: Wirtschaftsnachrichten

M2: Gruppenpuzzle zu Funktionen im Sachzusammenhang

M3: Forschungsaufgabe zu Zusammenhängen von besonderen Punkten einer Funktion und deren Ableitung.

M4: Checkliste zur Diagnose

**Finanzministerium
des Landes Nordrhein-Westfalen**


Startseite / Presse

Finanzministerium NRW

Neuverschuldung sinkt gegenüber 2016 um 20 Prozent gegenüber dem Vorjahr

Düsseldorf, den 10.02.15

Die Landesregierung hat in ihrem Eckwerteentscheid für den Haushalt 2016 festgelegt, die Neuverschuldung im kommenden Jahr auf gut 1,5 Milliarden Euro zu senken – 20 Prozent oder 380 Millionen Euro weniger als im Jahr 2015. „Wir gehen mit dieser Planung den nächsten wichtigen Schritt zum ausgeglichenen Haushalt. Das schaffen wir, obwohl wir zusätzliche Aufgaben wie die Flüchtlingshilfe und die Übernahme der Schulsozialarbeit stemmen“, sagte Finanzminister Norbert Walter-Borjans. „Haushaltsausgleich und Handlungsfähigkeit bei der Erfüllung unserer Aufgaben sind kein Gegensatz, sondern beides Voraussetzungen verantwortungsbewusster Landespolitik.“

Die Landesregierung rechnet im kommenden Jahr mit Einnahmen von 65 Milliarden Euro. Davon entfallen 50,5 Milliarden auf Steuereinnahmen, die damit gegenüber 2015 um 4,9 Prozent wachsen. Die Ausgaben steigen nach den Eckwerten um 3,7 Prozent auf 66,7 Milliarden Euro. Gegenüber den ursprünglichen Planungen sind Mehrausgaben von 350 Millionen Euro für durchlaufende Posten wie Zahlungen des Bundes für kommunale Aufgaben, von 430 Millionen Euro für Flüchtlingshilfen und 48 Millionen Euro für die Schulsozialarbeit veranschlagt.

Die Ratingagentur Standard & Poor's hat die erfolgreiche Konsolidierung der Landesregierung bestätigt und für die „sehr starke“ Kreditwürdigkeit des Landes erneut das Rating AA- mit stabilem Ausblick verliehen.

Finanzverwaltung NRW ©2015

[↑ Seitenanfang](#)

 Drucken

(Quelle: http://www.fm.nrw.de/presse/2015_02_10_Rahmendaten_2016.php)

Aufgaben:

- a) Lesen Sie den Artikel sorgfältig durch und klären Sie unbekannte Begriffe. Nutzen Sie dabei das Wissen ihres Nachbarn bzw. ihrer Nachbarin oder die bereitgestellten Hilfekarten.
- b) Warum wird mit dem Sinken der Neuverschuldung ein wichtiger Schritt zum ausgeglichenen Haushalt gegangen?
- c) Frau Schimmelpfennig ist nach der Lektüre dieses Artikels der Meinung, dass die Schulden des Landes NRW sinken. Was würden Sie ihr darauf antworten? Welcher Irrtum ist ihr unterlaufen?
- d) Beschreiben Sie die Veränderung der Schulden **und** der Neuverschuldung mit bekannten Begriffen aus der Analysis. Versuchen Sie beide Entwicklungen auch jeweils mit Hilfe eines möglichen Graphen zu beschreiben.

Neuverschuldung

Die Neuverschuldung ist der Geldbetrag, den ein Staat innerhalb eines Haushaltsjahres als Kredit aufnehmen muss um seine Ausgaben zu finanzieren.

Haushalt

Die Regierung eines Landes verabschiedet für jedes Jahr einen Finanzplan, der angibt, wieviel Geld für welchen Zweck ausgegeben werden soll und wie die benötigten Gelder eingenommen werden (Steuern, Kredite, ...).

Dieser Finanzplan wird Haushalt genannt.

kommunale Ausgaben

kommunale Ausgaben beschreiben die Ausgaben, die von Städten und Gemeinden verantwortet werden (z.B. Ausstattung von Schulen, Sozialleistungen, Investitionen in die Stadtentwicklung, ...)

Ratingagentur

Ratingagenturen (englisch Credit rating agency, CRA, zu Deutsch Bonitätsbewertungsagentur) sind private, gewinnorientierte Unternehmen, die gewerbsmäßig die Kreditwürdigkeit (Bonität) von Unternehmen aller Branchen sowie von Staaten und deren untergeordneten Gebietskörperschaften bewerten. Die Agenturen fassen das Ergebnis ihrer Untersuchung (Rating) in einer Buchstabenkombination (Ratingcode, kurz auch nur Rating) zusammen, die in der Regel von AAA bzw. Aaa (beste Qualität) bis D (zahlungsunfähig) reicht.

(aus: wikipedia)

Kreditwürdigkeit

Bonität (von lateinisch bonitas, „Vortrefflichkeit“) oder Kreditwürdigkeit ist in der Finanzwirtschaft die Fähigkeit einer natürlichen Person oder von Unternehmen oder Staaten, die aufgenommenen Schulden zurückzuzahlen (wirtschaftliche Rückzahlungsfähigkeit) und die Bereitschaft, diese zurückzuzahlen (Zahlungswilligkeit).

(aus: wikipedia)

Eckwertebeschluss

Beim Eckwertebeschluss handelt es sich um einen Beschluss der politischen Führung einer Gebietskörperschaft (Stadt-/Gemeinderat, Kreistag, Landtag, Bundestag), in dem die wesentlichen Punkte des geplanten Haushalts festgelegt werden.



ARD Home Nachrichten Sport Börse Ratgeber Wissen Kultur Kinder ARD Intern Fernsehen Radio ARD Mediathek **ARD®**

tagesschau.de Suche in tagesschau.de

Startseite Videos & Audios Inland Ausland Wirtschaft Wahlarchiv Wetter Ihre Meinung Mehr

Startseite Inland "Schwarze Null" ein Jahr früher erreicht

Ausgeglichenener Haushalt schon 2014
"Schwarze Null" ein Jahr früher erreicht
 Stand: 12.01.2015 17:26 Uhr

Die Bundesregierung ist im vergangenen Jahr erstmals seit 1969 ohne neue Schulden zur Finanzierung ihres Haushalts ausgekommen. Koalitionskreise bestätigten mehreren Nachrichtenagenturen einen entsprechenden Bericht des "Handelsblatts".

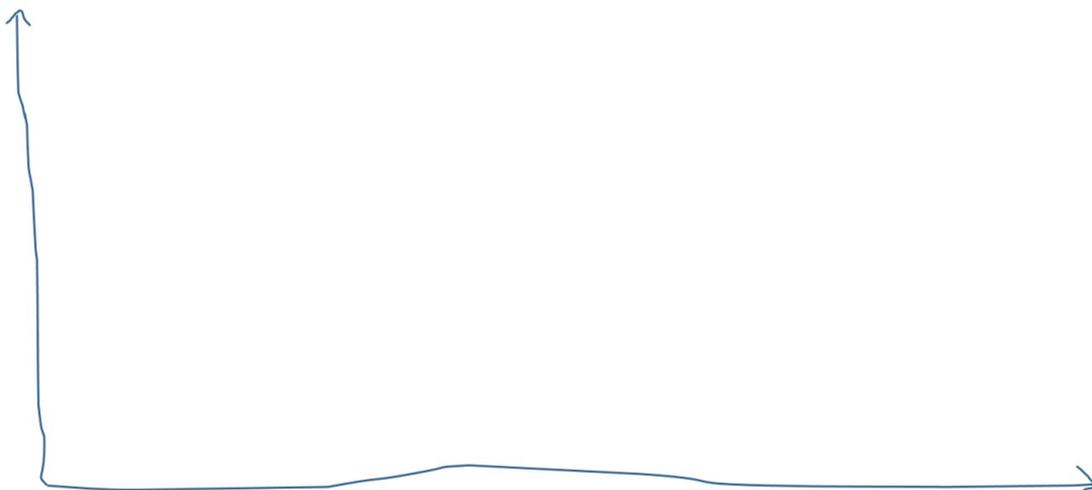
Damit erreichte Finanzminister Wolfgang Schäuble ein Jahr früher als geplant sein Ziel der "schwarzen Null". Als Gründe wurden neben anhaltend hohen Steuereinnahmen und niedrigen Zinsausgaben auch eine Milliardenzahlung der Betreiber von Atomkraftwerken aus der umstrittenen Kernbrennstoffsteuer an den Bund kurz vor dem Jahreswechsel genannt.

(Quelle: <http://www.tagesschau.de/inland/bundeshaushalt-schwarze-null-101.html>)

Fragen:

Wie würden Sie diese Nachricht erklären?

Was bedeutet diese Nachricht für die Neuverschuldungskurve bzw. der Schuldenkurve des Bundeshaushaltes?



WESER KURIER

Zeitungsausschnitt 30.08.2006

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus für Sparkurs nutzen / Keine Kurskorrektur bei Reformen

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage. [...]

Aufgabe:

„Bei einer Senkung [der Neuverschuldung] würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren“

(1)

Beurteilen Sie diese Aussage von Angela Merkel auf der Grundlage ihres bereits erworbenen Wissens über Schulden und Neuverschuldung. Ist es von dem Autor dieses Artikels sinnvoll diese

Aussage ohne weitere Erklärungen an die Leserinnen und Leser weiterzugeben?

(2)

Schreiben Sie einen fiktiven Leserbrief (s.u.) an den Weser-Kurier, in dem Sie Ihre Überlegungen aus dem ersten Aufgabenteil einfließen lassen.

Problemstellung

In dieser Unterrichtssequenz sollen Sie zur Einführung von Funktionsuntersuchungen unterschiedliche Bedeutungen von Ableitungen, Extrem- und Wendepunkten betrachten und konkretisieren. Diese Seite gibt Ihnen einen Überblick über den Ablauf der Unterrichtssequenz.

Ablaufplan

Es gibt insgesamt 4 Beispiele:

- Grippeepidemie
- Heißluftballon
- Gewinn und Verlust
- Besucheranzahl

Phase I: Bildung von Gruppen und Erarbeitung (20 min)

Teilen Sie Ihre Klasse zunächst in Gruppen mit vier bis fünf Mitgliedern auf. Bearbeiten Sie das Ihnen zugewiesene Beispiel mit Hilfe der Arbeitsaufträge. Jedes Gruppenmitglied muss in der Lage sein, die Ergebnisse der Gruppenarbeit anschließend vorzustellen.



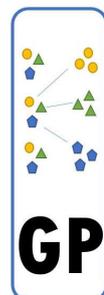
Phase II: Ergebnispräsentation mittels Gruppenpuzzle (20 min)

Jetzt werden die Ergebnisse innerhalb neuer Gruppen vorgestellt. Es werden so viele neue Gruppen gebildet, wie die kleinste Gruppe Mitglieder hat. Aus jeder alten Gruppe wird jeweils ein Mitglied in die neuen Gruppen geschickt.

In den einzelnen Gruppen werden nun die Ergebnisse der Gruppenarbeit von den einzelnen Experten vorgestellt.

Im Anschluss an jede Vorstellung vervollständigen Sie dann die Ihnen vorliegende Übersicht (Auftrag 1).

Der Zeittakt zum Wechseln beträgt 5 min.



Phase III: Sicherung (10 min)

Im Anschluss an die Ergebnispräsentation bleiben Sie in den Gruppen aus Phase II und bearbeiten den Auftrag 2.



Funktionsuntersuchungen

Arbeitsauftrag zum Gruppenpuzzle

1. Ergänzen Sie jeweils zum Abschluss der einzelnen Präsentationen in ihrer Gruppe folgende Übersicht:

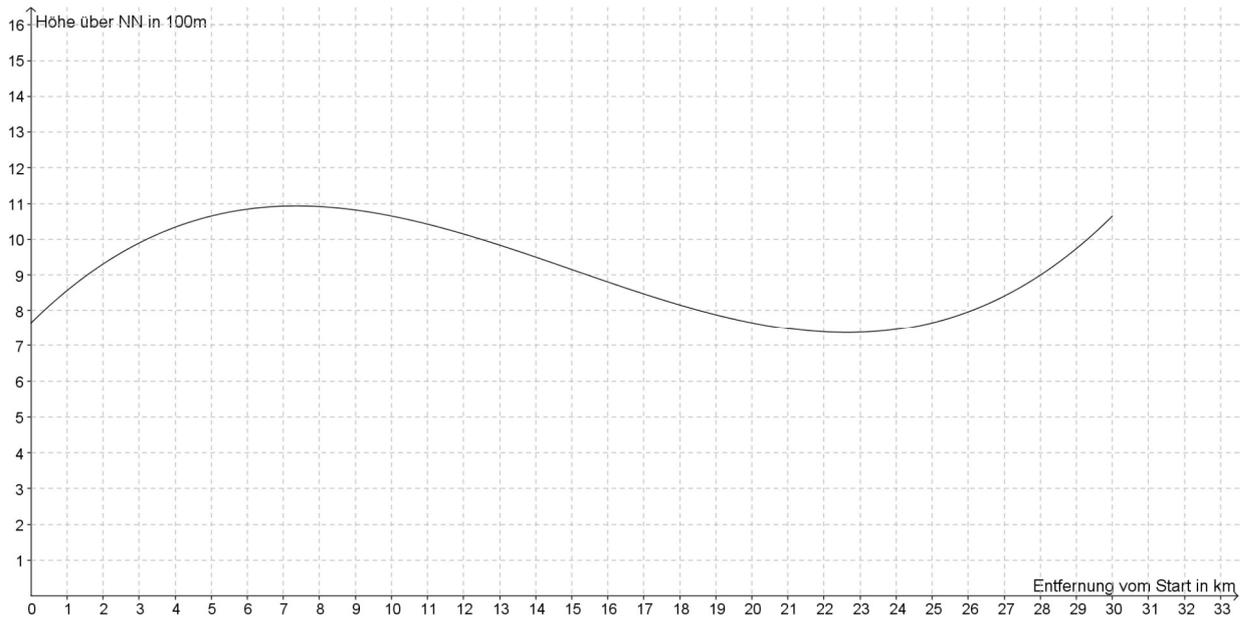
Inhaltliche Deutung des Graphen [f(t)]	Inhaltliche Deutung der Ableitung [f'(t)]	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte
Grippeepidemie			
Heißluftballon			
Besucheranzahl			
Gewinn			

Funktionsuntersuchungen

2. Zur Sicherung betrachten Sie nun folgenden Sachzusammenhang und füllen Sie die Ihnen bereits bekannte Tabelle aus:

Höhenprofil einer Bergetappe

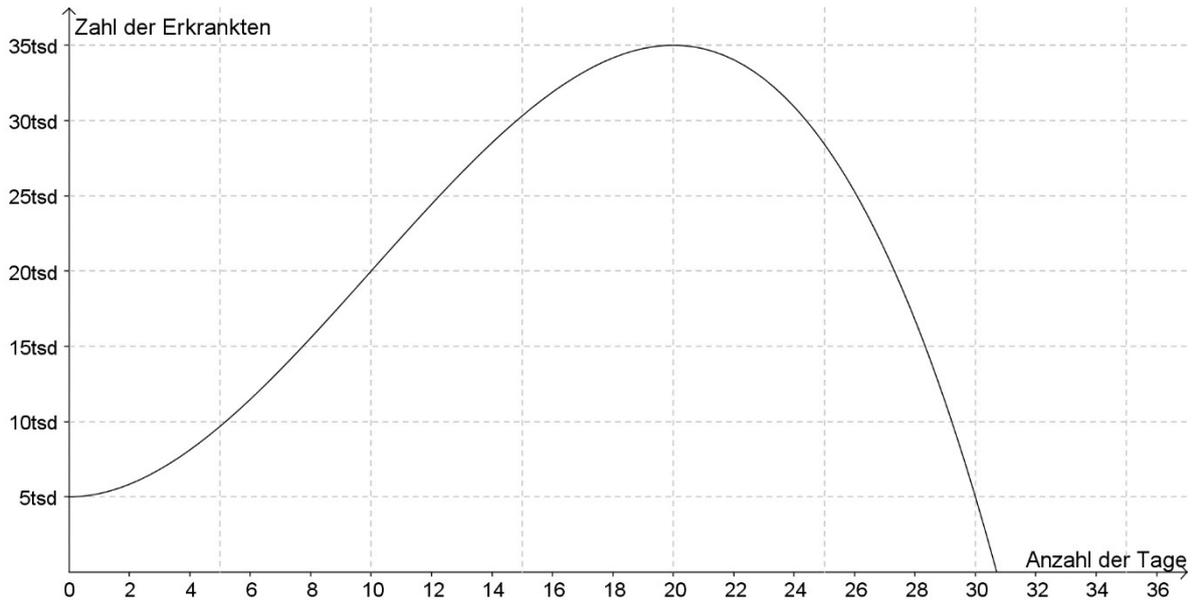
Das Diagramm beschreibt den Verlauf einer Bergetappe bei einem Radrennen. Die Werte auf der x-Achse beschreiben dabei die horizontale Entfernung vom Start in km, die Werte auf der y-Achse die Höhe über den Meeresspiegel (NN) in 100 m.



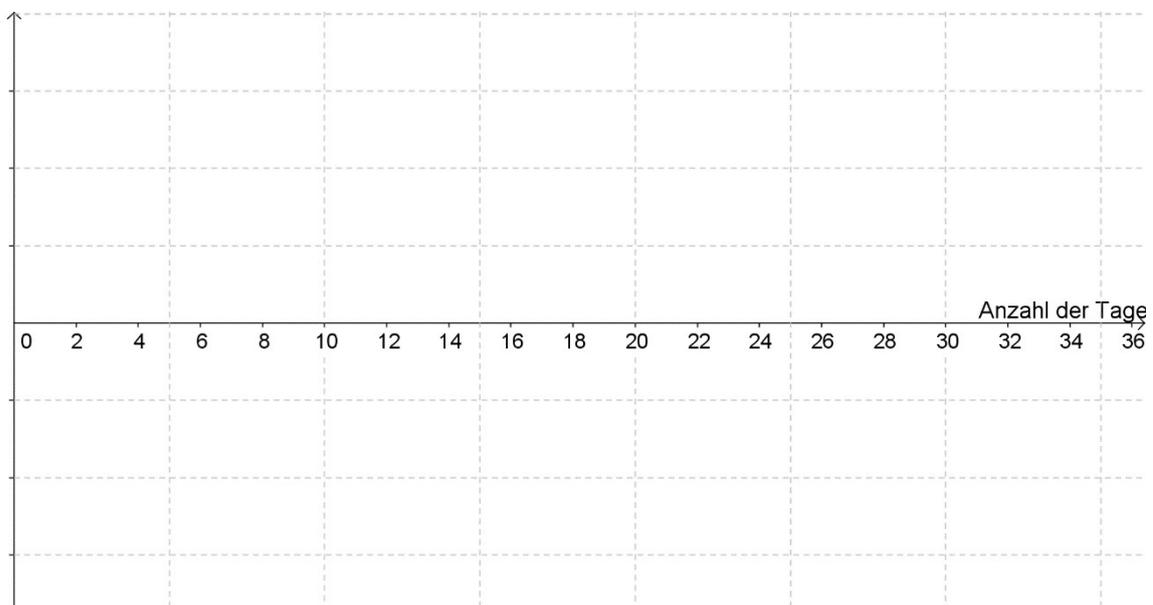
Inhaltliche Deutung des Graphen $[f(t)]$	Inhaltliche Deutung der Ableitung $[f'(t)]$	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

Grippeepidemie

Während einer Grippeepidemie ist eine bestimmte Zahl von Personen gerade erkrankt. Täglich erkranken neue Personen, gleichzeitig werden aber auch bereits Erkrankte wieder gesund. Das Diagramm beschreibt den Verlauf einer konkreten Grippeepidemie, zum Zeitpunkt $t=0$ sind hier 5000 Personen erkrankt.



- a) Beschreiben Sie den Verlauf der Grippeepidemie qualitativ (ohne Rechnung). Berücksichtigen Sie dabei folgende Fragen:
In welchen Zeitabschnitten stieg/ fiel die Anzahl der Erkrankten?
Zu welchen Zeitpunkten stieg bzw. fiel die Anzahl der Erkrankten am schnellsten?
- b) Skizzieren Sie nun die Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten in das nachfolgende Koordinatenkreuz. Benutzen Sie dabei die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).



Funktionsuntersuchungen

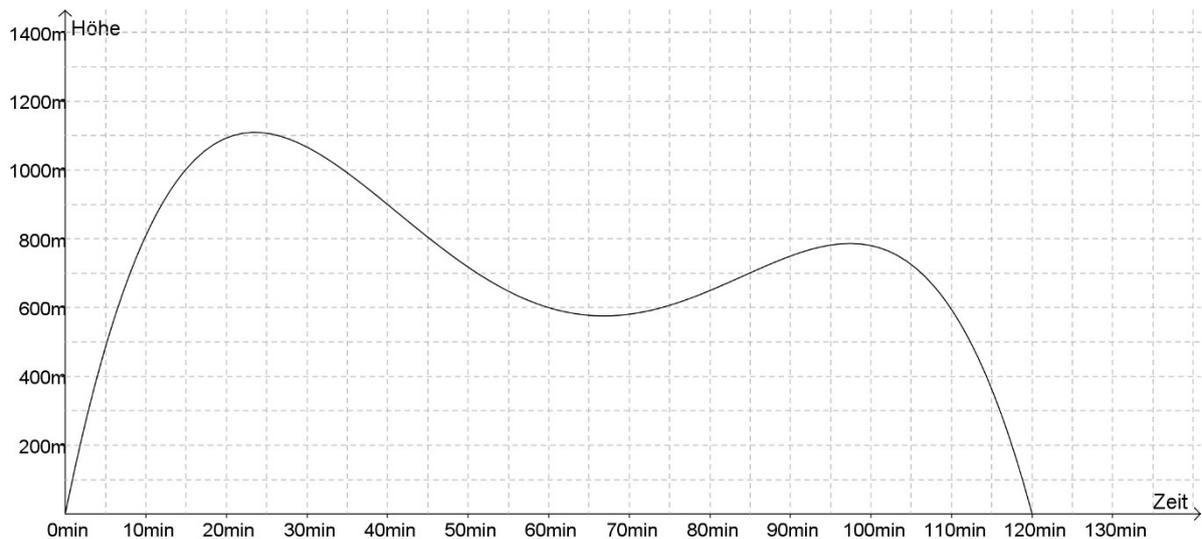
- c) Beschreiben Sie nun die Änderungsrate ebenfalls qualitativ.
Wann war sie positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
Was bedeutet positive, negative, maximale und minimale Änderungsrate für den Verlauf der Epidemie?
- d) Übertragen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus dem Sachzusammenhang auf innermathematische Zusammenhänge, indem sie die folgende Tabelle ausfüllen:

Inhaltliche Deutung des Graphen [f(t)]	Inhaltliche Deutung der Ableitung [f'(t)]	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

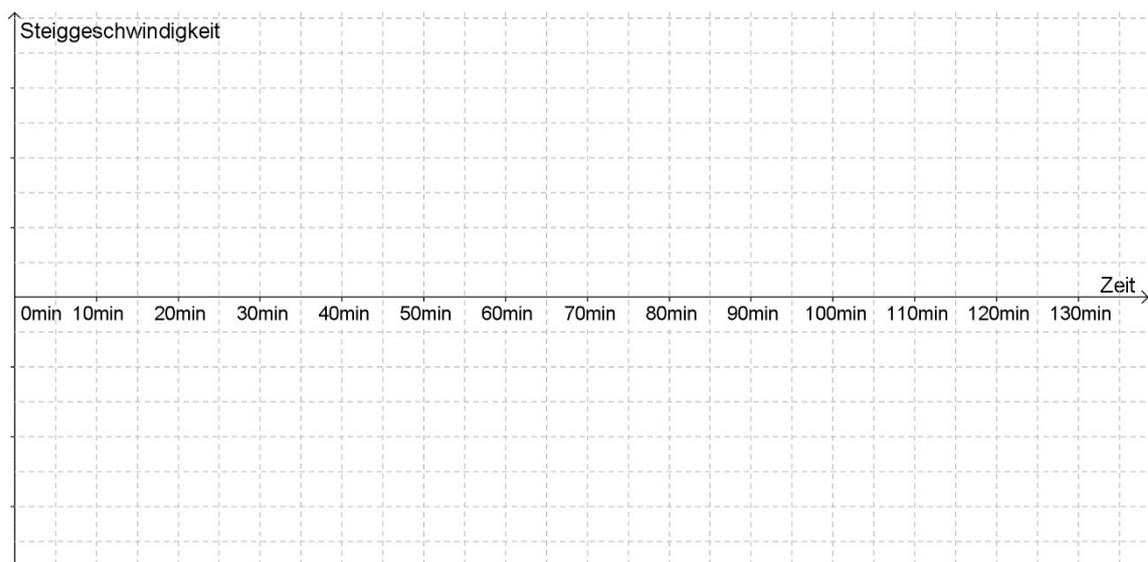
Funktionsuntersuchungen

Heißluftballon

Ein Heißluftballon startet zum Zeitpunkt $t=0$ vom Boden. Das Diagramm beschreibt die Höhe des Ballons zu einem bestimmten Zeitpunkt.



- a) Beschreiben Sie den Bewegungsablauf des Heißluftballons qualitativ (ohne Rechnung). Berücksichtigen Sie dabei folgende Fragen:
 In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Ballon nach unten/ nach oben?
 Zu welchen Zeitpunkten steigt bzw. fällt der Ballon am schnellsten?
- b) Die Geschwindigkeit, mit dem der Ballon steigt bzw. fällt, nennt man Steiggeschwindigkeit. Skizzieren Sie nun die Steiggeschwindigkeit des Heißluftballons in das nachfolgende Koordinatenkreuz. Benutzen Sie dabei die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).



Funktionsuntersuchungen

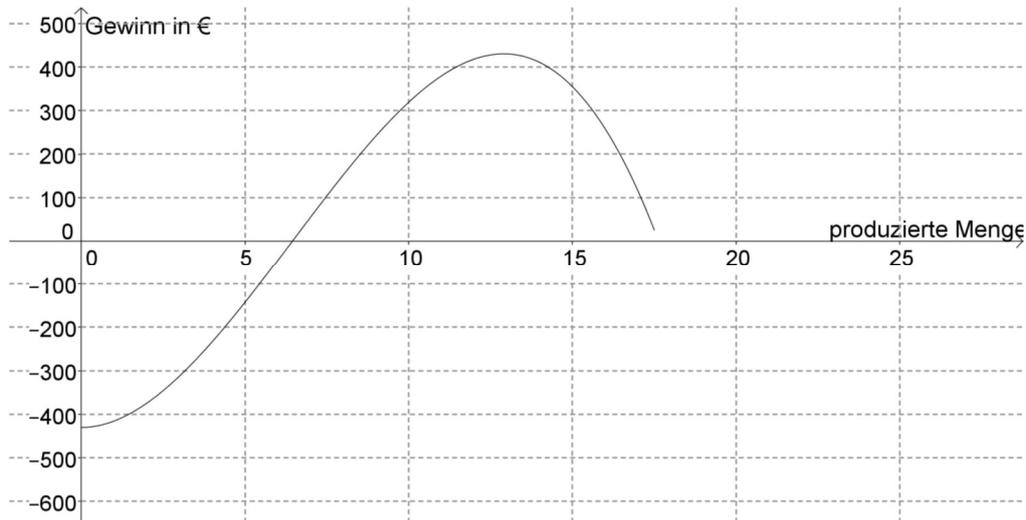
- c) Beschreiben Sie nun die Steiggeschwindigkeit des Ballons ebenfalls qualitativ.
Wann war sie positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
Was bedeutet positive, negative, maximale und minimale Steiggeschwindigkeit für den Ballon?
- d) Übertragen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus dem Sachzusammenhang auf innermathemische Zusammenhänge, indem sie die folgende Tabelle ausfüllen:

Inhaltliche Deutung des Graphen [f(t)]	Inhaltliche Deutung der Ableitung [f'(t)]	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

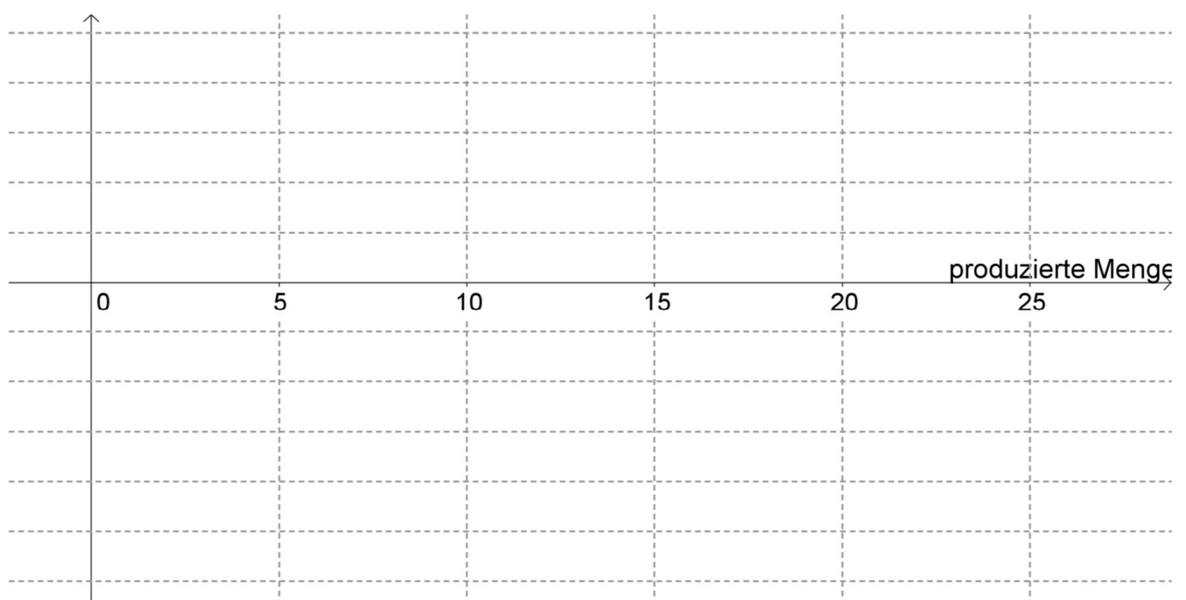
Funktionsuntersuchungen

Gewinnfunktion

Auch in der betriebswirtschaftlichen Rechnung wird die höhere Mathematik benötigt. Beispielsweise kann der produzierten Menge nach Verrechnung des Umsatzes und der Kosten eine Gewinnfunktion zugeordnet werden. Diese beschreibt den Gewinn in € in Abhängigkeit der produzierten Menge. Eine vereinfachte Gewinnfunktion kann wie folgt aussehen:



- a) Beschreiben Sie den Verlauf der Gewinnfunktion qualitativ (ohne Rechnung). Berücksichtigen Sie dabei folgende Fragen:
 Bei welchen Produktionsmengen wird Verlust, bei welchen Gewinn erwartet?
 Bei welchen Produktionsmengen steigt der Gewinn, bei welchen fällt er?
 Bei welcher Produktionsmenge steigt bzw. fällt der Gewinn am schnellsten?
- b) Skizzieren Sie nun die Änderungsrate des Gewinns in das nachfolgende Koordinatenkreuz. Benutzen Sie dabei die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).



Funktionsuntersuchungen

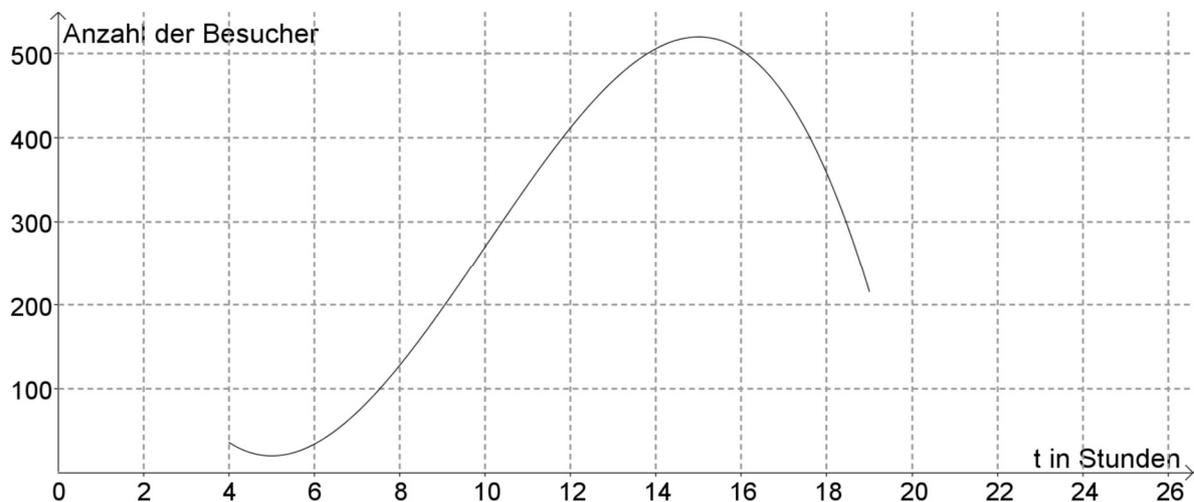
- c) Beschreiben Sie nun die Änderungsrate ebenfalls qualitativ.
Wann war sie positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
Was bedeutet positive, negative, maximale und minimale Änderungsrate für den Verlauf der Gewinnfunktion?
- d) Übertragen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus dem Sachzusammenhang auf innermathemische Zusammenhänge, indem sie die folgende Tabelle ausfüllen:

Inhaltliche Deutung des Graphen [$f(t)$]	Inhaltliche Deutung der Ableitung [$f'(t)$]	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

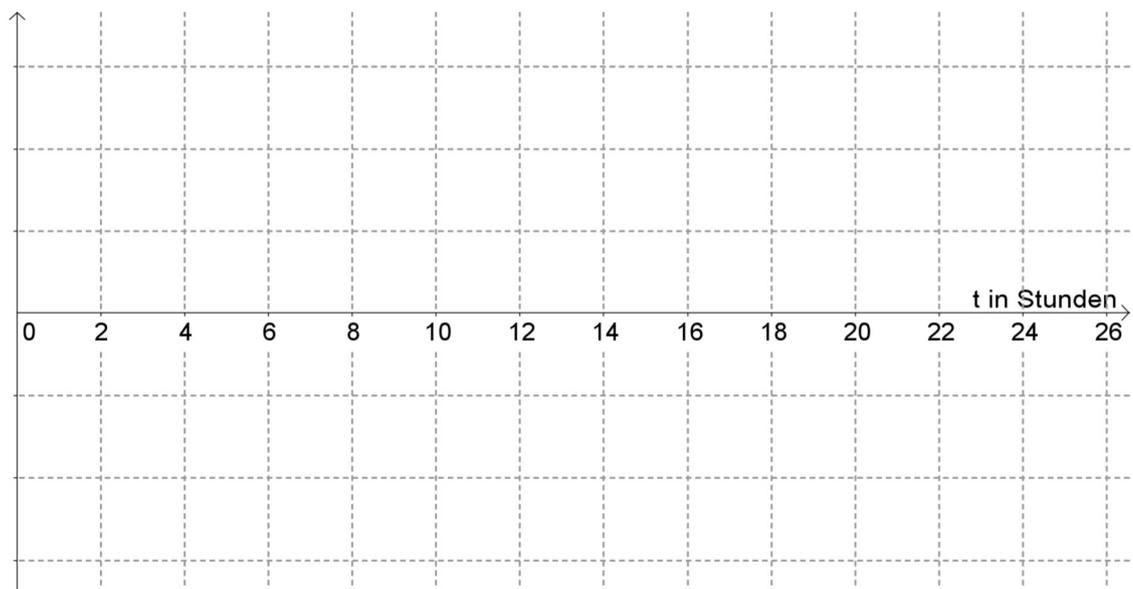
Funktionsuntersuchungen

Besucherzahlen

Auf einer Homepage kann die Besucheranzahl der Seite zu jedem Zeitpunkt ermittelt werden. Der nachfolgende Graph zeigt die Besucheranzahl auf einer Homepage im Laufe eines Tages an.



- a) Beschreiben Sie den Verlauf der Besucherzahl qualitativ (ohne Rechnung). Berücksichtigen Sie dabei folgende Fragen:
 In welchen Zeitabschnitten stieg/ fiel die Anzahl der Besucher?
 Zu welchen Zeitpunkten stieg bzw. fiel die Anzahl der Besucher am schnellsten?
- b) Skizzieren Sie nun die Änderungsrate der Anzahl der Besucher in das nachfolgende Koordinatenkreuz. Benutzen Sie dabei die Erkenntnisse aus Aufgabenteil a).



Funktionsuntersuchungen

- c) Beschreiben Sie nun die Änderungsrate ebenfalls qualitativ.
Wann war sie positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
Was bedeutet positive, negative, maximale und minimale Änderungsrate für den Verlauf der Besucherzahl?
- d) Übertragen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus dem Sachzusammenhang auf innermathemische Zusammenhänge, indem sie die folgende Tabelle ausfüllen:

Inhaltliche Deutung des Graphen $[f(t)]$	Inhaltliche Deutung der Ableitung $[f'(t)]$	Inhaltliche Deutung der Extrempunkte	Inhaltliche Deutung der Wendepunkte

Funktionsuntersuchungen

M3 Forschungsaufgabe

Wählen sie mit einer Gruppe jeweils eine der nebenstehenden Funktionen aus.

A: $f(x) = 3x^3 - 9x$

C: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

E: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$

B: $f(x) = 0,5x^3 - x^2 - 6x + 2$

D: $f(x) = 0,05x^3 - 0,6x^2 + 3x + 4$

F: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 5$

1. GRAPHEN MIT DEM GTR ZEICHNEN LASSEN



Zeichnen Sie die Graphen zu $f(x)$ und $f'(x)$ mit Hilfe des GTR in ein geeignetes Koordinatensystem.

2. FUNKTIONSGRAPHEN AUF POSTER ÜBERTRAGEN

Übertragen sie die Graphen auf ein Poster (Graph von f in blau und f' in rot). Heben Sie die „besonderen Punkte“ der Graphen von f und f' (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) durch Kennzeichnung hervor.

3. ZUSAMMENHÄNGE UNTERSUCHEN

Untersuchen Sie falls möglich nun die beiden Graphen mit Hilfe folgender Fragestellungen:

- In welchen Bereichen ist die Steigung von f positiv/ negativ?
- Kann man diese Bereiche auch mit Hilfe von f' beschreiben?
- Was passiert mit f' an der Stelle, an der f einen Hoch-/Tiefpunkt besitzt?
- Kann ich mit Hilfe von f' erkennen, ob f an der Stelle x_0 einen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt?
- Was passiert mit f' an der Stelle, an der f einen Wendepunkt besitzt?

4. ÜBERTRAGUNG DER ERGEBNISSE IN MATHEMATISCHE AUSSAGEN

Formulieren Sie Ihre Ergebnisse in allgemeingültige Aussagen (z.B.: f besitzt an der Stelle x_0 einen Hochpunkt, wenn ...). Schreiben Sie diese Aussagen auf ein DinA4-Blatt und heften Sie diese an die bereitgestellte Fläche, ebenso die Poster, auf der die entsprechenden Graphen abgebildet sind.

5. ORDNETN UND SICHERN DER ERGEBNISSE

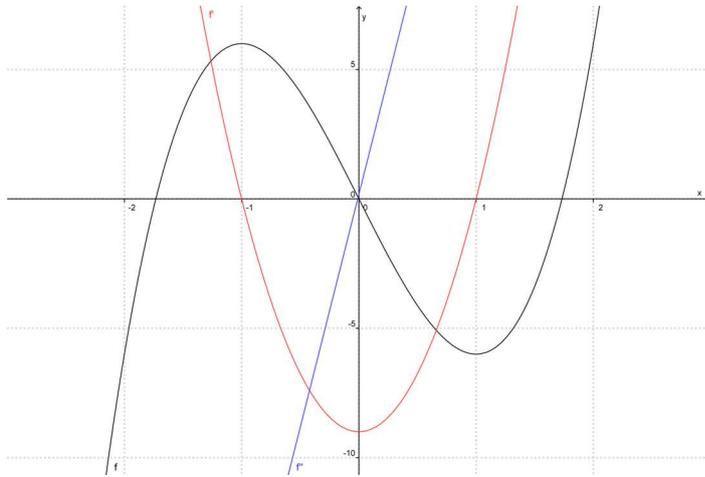
Vergleichen und diskutieren sie die gefundenen Aussagen. Ordnen Sie die Aussagen und formulieren Sie allgemeine Regeln für die Extrem- und Wendepunkte einer Funktion.

Die allgemein anerkannten und begründeten Aussagen werden schließlich im Mathematikheft festgehalten.

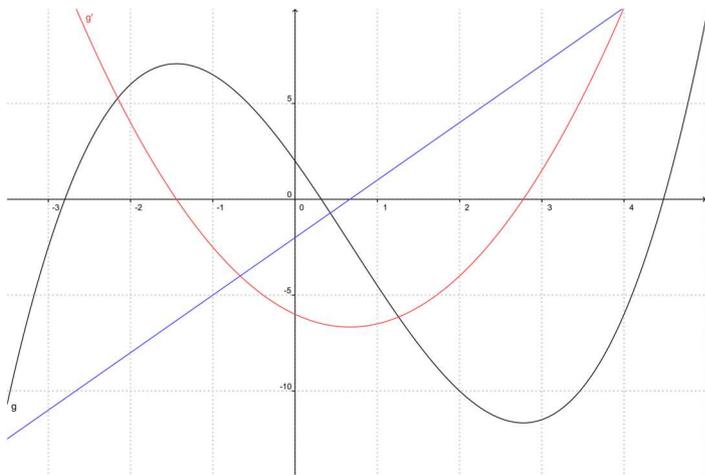
Funktionsuntersuchungen

In der Forschungsaufgabe genutzte Funktionen:

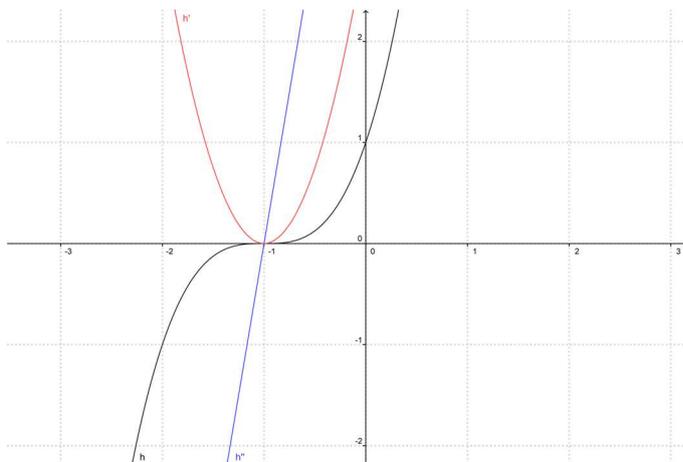
$$f(x) = 3x^3 - 9x$$



$$f(x) = 0,5x^3 - x^2 - 6x + 2$$

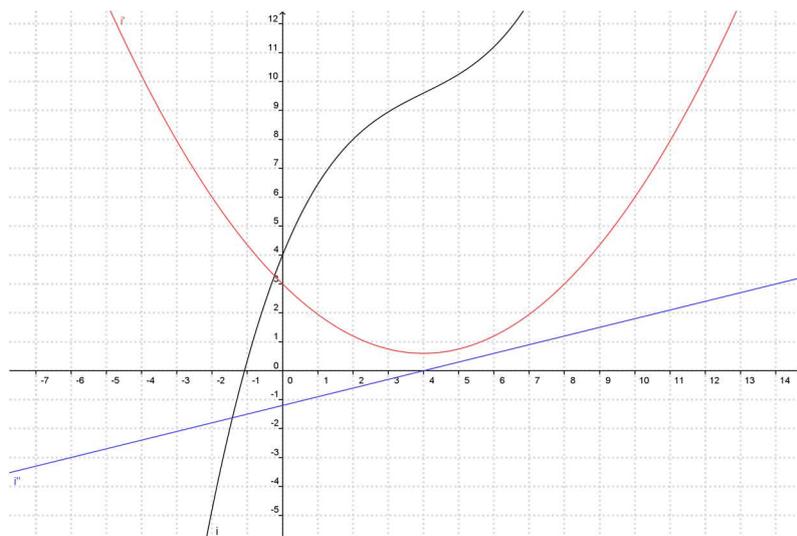


$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

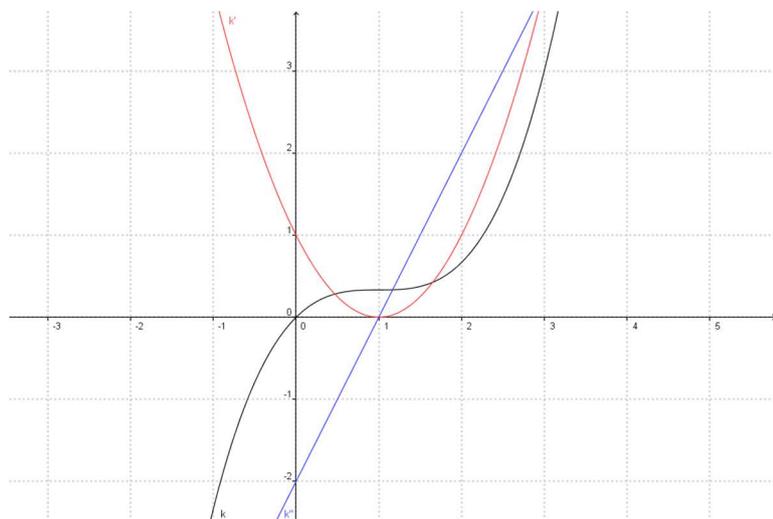


Funktionsuntersuchungen

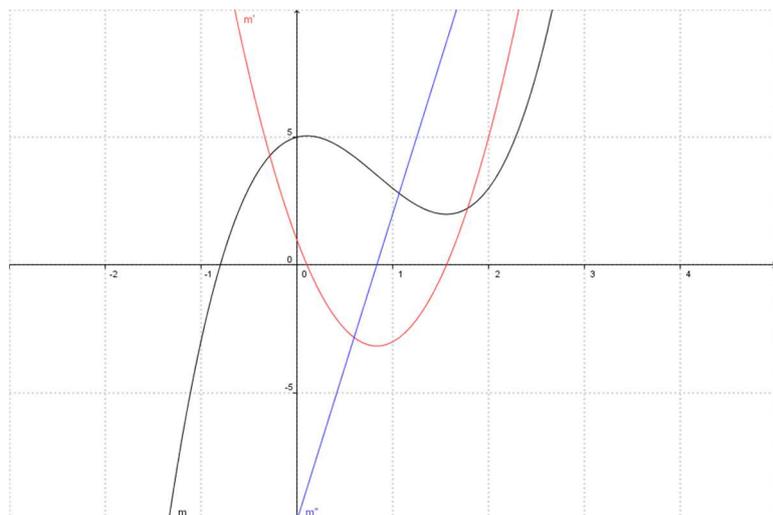
$$f(x) = 0,005x^3 - 0,6x^2 + 3x + 4$$



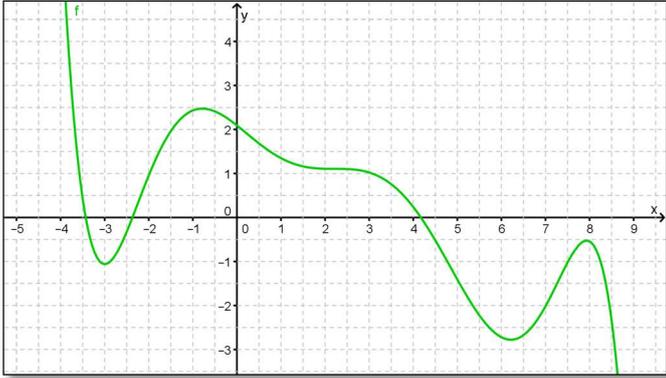
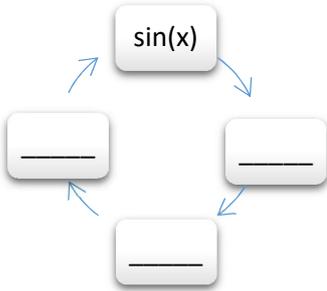
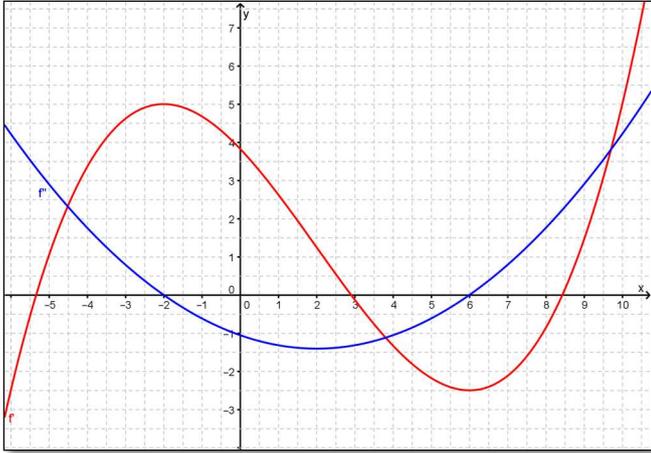
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$



$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 5$$



CHECKLISTE Nachrichten aus Politik und Wirtschaft – Funktionsuntersuchungen

Ich kann ... Ich kenne ...	So gut kann ich das ...	Hier kann ich üben ...
<p>Ich kann Funktionen graphisch ableiten.</p> <p>Skizzieren Sie eine Ableitungsfunktion der Funktion $f(x)$ in das gleiche Koordinatensystem:</p> 		
<p>Ich kenne die Ableitung der der Sinusfunktion.</p> <p>Geben Sie jeweils die Ableitung an:</p> 		
<p>Ich kann die Eigenschaften eines Funktionsgraphen mit Hilfe der Ableitungsfunktionen beschreiben.</p> <p>In dem Koordinatensystem ist die die erste und zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Welche Eigenschaften besitzt die Funktion $f(x)$?</p> 		

Funktionsuntersuchungen

Ich kann Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen ableiten.

Geben Sie die Ableitungsfunktionen an:

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
- b) $f(x) = \sqrt{x}$
- c) $f(x) = -2x^4 - x^3 + 7x$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}$



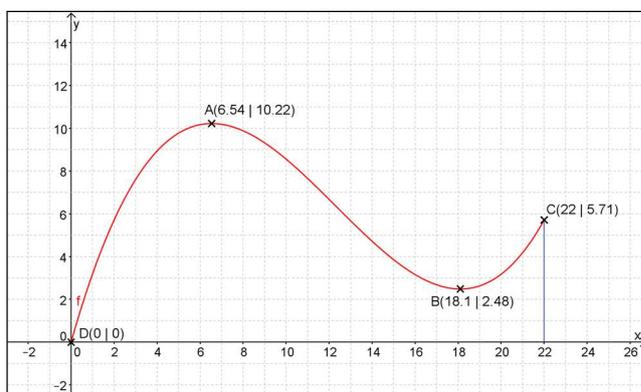
Ich kann Extrempunkte einer ganzrationalen Funktion bestimmen.

Zeigen Sie, dass $HP(0|-3)$, $T_1(1|-4)$ und $T_2(-1|-4)$ die Extrempunkte der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ sind.



Ich kenne den Unterschied zwischen lokalen und globalen Extrema.

Ordnen Sie jeweils die Punkte zu.



Hochpunkte:

global: _____

lokal: _____

Tiefpunkte:

global: _____

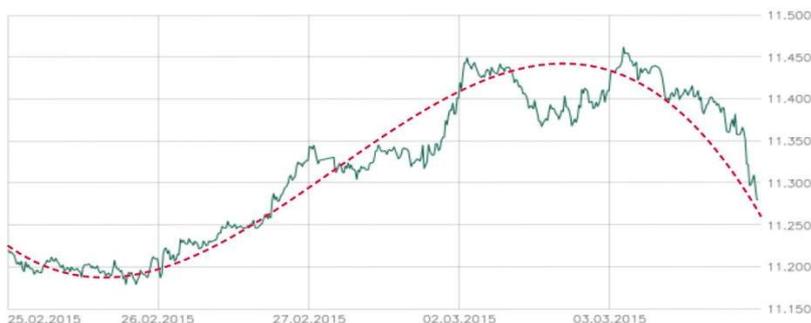
lokal: _____



Ich kann meine Kenntnisse über Eigenschaften von Funktionen zum Lösen von realen Problemen nutzen.

DAX
ISIN: DE0008469008 | WKN: 846900

wallstreet:online



Der Verlauf des deutschen Aktienindex (DAX) innerhalb der hier abgebildeten 5 Tage, kann annähernd durch die gestrichelte Funktion

$$f(t) = -0,0013t^3 + 0,2024t^2 - 5,2823t + 11226 \quad (t \text{ in Stunden})$$

beschrieben werden.

- a. Bestimmen Sie den Zeitpunkt an dem der DAX seinen Tiefstand erreicht hat.
- b. Je schneller der DAX steigt, umso größer sind in der Regel die Gewinne am Aktienmarkt. Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem dies für diese 5 Tage der Fall war.

