Übergang SI-SII konkretisiert am Unterrichtsvorhaben zu exponentiellen Wachstumsprozessen

Autoren:
Dr. V. Schubert
Arbeitsgruppe Materialentwicklung QUA-LiS NRW

Juni 2014

Kurzbeschreibung

Das vorliegende Konzept eines Unterrichtsvorhabens zu exponentiellen Wachstumsprozessen beschäftigt sich mit der Problematik, im Bereich des Potenzkalküls die Anschlussfähigkeit zwischen Sekundarstufe I und II herzustellen, ohne dafür eine isolierte Unterrichtsreihe vorzusehen. Vielmehr wird versucht, die Potenzrechenregeln genetisch in eine Unterrichtsreihe über exponentielle Wachstumsprozesse einzubinden und den im Schülerdenken stärker vernetzten Funktionsbegriff als Leitidee zu nutzen.

Dazu werden 6 Unterrichtseinheiten im Gesamtumfang von 8 Unterrichtsstunden à 45 Minuten vorgestellt. Zusätzlich wird es erforderlich sein, algebraische Rechentechniken durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen diagnosegestützt zu üben. Kürzungen sind bei den beiden letzten Unterrichtseinheiten ohne Gefährdung des Kerns möglich, da das Thema in der Qualifikationsphase wiederaufgegriffen wird.

Als weitere Materialien werden unterrichtsbegleitende Diagnosebögen beigegeben, die den unverzichtbaren Selbstlernprozess unterstützen sollen. Idealerweise wird diese Arbeit durch ein koordiniertes Vorgehen in den Vertiefungskursen unterstützt, da gerade die aus fachlicher Sicht schwächeren Schülerinnen und Schüler zugleich eine weniger gut ausgeprägte Selbstlernkompetenz mitbringen und daher zusätzlicher, auch methodischer Unterstützung bedürfen. Abgerundet wird das Angebot durch eine auf die Unterrichtsreihe abgestimmte Leistungsüberprüfung.

Der Rolle des *GTR* soll insoweit besondere Beachtung geschenkt werden, als die Lernenden in den meisten Fällen noch wenig Erfahrung im Einsatz des Gerätes zum Zeitpunkt des Unterrichtsvorhabens haben dürften. Daher wird jeweils aufgezeigt, wo bestimmte Funktionalitäten in Verknüpfung mit dem neuen Thema erlernt werden können.

Als weitere prozessbezogene Kompetenz steht das Modellieren besonders im Fokus. Es wird sichergestellt, dass sowohl praktisch relevante, diskrete und kontinuierliche Wachstumsprozesse (Verzinsung, Vermehrung von Pflanzen) als auch Zerfallsprozesse (Inflation, Bierschaumzerfall) eine Rolle spielen. Dem Bierschaumzerfall wurde der Vorzug vor dem radioaktiven Zerfall gegeben, um eine kritische Diskussionen der Modellierung ausdrücklich anzuregen.

Übersicht über die Unterrichtseinheiten

1. Das Prinzip exponentiellen Wachstums erarbeitet an einem Gedankenexperiment (Einzelstunde).
2. Vergleich von exponentiellem und linearem Wachstums am Beispiel von Verzinsung mit dem Ziel, den Begriff des Wachstumsfaktors zu erarbeiten (Doppelstunde).
3. Beschreibung eines kontinuierlichen Wachstumsprozesses durch eine Exponentialfunktion als Zugang zur kontextgestützten Deutung nicht-natürlicher Potenzen (Einzelstunde).
4. Modellierung einer Messreihe durch eine Exponentialfunktion am Beispiel des Bierschaumzerfalls (Einzelstunde).
5. Eine Funktionenwerkstatt zu Exponentialfunktionen (Doppelstunde).
6. Wie man eine Exponentialfunktion durch zwei Punkte legt (Einzelstunde).

Didaktische Hinweise

Problemanzeige und Intentionen

Die vorgelegte Reihe setzt die Lehrplanvorgabe „Schülerinnen und Schüler beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen“ so um, dass ein Schwerpunkt im Bereich des Modellierens gesetzt wird und zugleich wichtige Grundfunktionen des *GTR* im Bereich der Tabellenkalkulation genutzt werden. Eine weitere Intention besteht darin, dieses Unterrichtsvorhaben an den Anfang der Einführungsphase zu setzen und dabei eine Schwierigkeit anzugehen, die sich durch den Übergang aus dem verkürzten Bildungsgang G8 am Gymnasium sowie aus Grundkursen an den Gesamtschulen ergibt. Es ist möglich, dass Schülerinnen und Schüler die Potenzrechenregeln nicht mehr automatisch in die gymnasiale Oberstufe mitbringen. Allenfalls die Grundvorstellung „Potenz zählt Faktoren“, die in der Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in IN)$ zum Ausdruck kommt, kann wohl vorausgesetzt werden. Klafft hier also eventuell eine Anpassungslücke zwischen den Kernlehrplänen? Wie kann sie geschlossen werden? Ein Blick auf die Inhalte der Q-Phase lässt erkennen, dass Potenzrechenregeln im Umgang mit ganzrationalen Funktionen eine Nebenrolle spielen und dafür eher im Bereich der – aus Anwendersicht relevanteren – Exponentialfunktionen benötigt werden. Daher sollen sie auch hier in dieses Thema integriert werden.

Didaktische Begründung des Konzeptes

Es hat sich bei der Durchführung ähnlich aufgebauter Unterrichtsvorhaben gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler innerhalb des Themas „Exponentielles Wachstum“ gut in der Lage sind, Potenzrechenregeln mit Fragestellungen im Kontext zu vernetzen und in neuen Kontexten anzuwenden. Dagegen bieten die Potenzfunktionen keine vergleichbar guten Möglichkeiten. Auch wenn Potenzfunktionen in der Systematik traditionell vor den Exponentialfunktionen stehen, gibt diese Reihenfolge kein didaktisches Vorgehen vor. Lernende betrachten Terme der Art a^x oder x^a grundsätzlich nicht unterschiedlich, wenn ihnen der funktionale Aspekt fehlt, der üblicherweise x in die Rolle der Variablen und a in die Rolle eines Parameters zwingt. Diese Doppelbödigkeit macht eine Schwierigkeit des abstrakten Umganges mit Potenztermen aus, die durch die klare Entscheidung zugunsten einer funktionalen Betrachtung $f_a : x \mapsto a^x$ ein Stück weit behoben wird. Die Funktionen werden im Unterrichtsvorhaben als einparametrige Funktionsschar mit dem *GTR* analysiert. Die Bestimmung einer geeigneten Basis a ist eine der grundlegenden Aufgabenstellungen sowohl im Modellierungs- als auch im innermathematischen Problemlösebereich.

Bildungswert des Potenzkalküls

Das beschriebene Vorgehen entspricht dem in NRW praktizierten Vorgehen, den Kompetenzbereich K5 der Bildungsstandards „Mit Mathematik symbolisch / formal / technisch umgehen“ in alle übrigen Bereiche zu integrieren. Ein zu weit gehender Verzicht auf den Potenzkalkül würde zweifelsohne den Spielraum in den Bereichen des Modellierens, Problemlösens und Argumentierens in der Analysis deutlich einengen. Darüber hinaus kann dem Potenzkalkül ein eigener Bildungswert im Sinne der zweiten Winterschen Grunderfahrung

„mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ zugeschrieben werden. Bei der Wiederaufnahme des Themas „Exponentielles Wachstum“ nach der Differenzierung in Grund- und Leistungskurse kann diese Grunderfahrung dem jeweiligen Bildungsweg gemäß vertieft werden.

Diagnose und Üben

Bei der Durchführung ähnlich aufgebauter Unterrichtsvorhaben wurde deutlich, dass ein erfolgreicher Umgang mit Potenzrechenregeln im Kontext von Exponentialfunktionen nicht automatisch sicherstellt, dass eine Anwendung in abstrakter Form außerhalb des Kontextbezuges gelingt, schon weil der funktionale Aspekt schnell verloren geht. Dadurch entsteht die Gefahr, dass die Übertragbarkeit der erworbenen Kompetenzen in andere Unterrichtszusammenhänge eingeschränkt bliebe, wenn das Verständnis des angewendeten Kalküls nicht durch eigene Aufgabenformate gesichert würde. Eventuell blockieren bereits tiefergehende Unsicherheiten im Umgang mit Termen (Variablenverständnis) den Erfolg. Genaueren, individuell differenzierten Aufschluss über Vorkenntnisse liefert eine Eingangsdiagnose. Sie soll Grundlage eines den Unterricht begleitenden Übungsprozesses sein, der auf die gängigen Übungsaufgaben aus älteren Büchern der ehemaligen Stufe 10 des Gymnasiums oder auch aktuellen Lehrwerken der Stufe 9 (GY) bzw. 10 (GES) sowie Materialien der Schulbuchverlage zurückgreifen kann. Keinesfalls verspricht isoliertes Vorratslernen losgelöst vom Unterrichtsvorhaben über exponentielles Wachstum nachhaltigen Erfolg und wird auch durch den Kernlehrplan SII nicht unterstützt. Organisieren lässt sich der Übungsprozess, indem man z.B. eine von drei Wochenstunden dafür vorsieht sowie entsprechende Wochenhausaufgaben stellt. Der Vertiefungskurs kann einen Teil der zeitlichen Belastung auffangen.

Potenzrechenregeln konkret

Im Folgenden werden die Potenzrechenregeln wie folgt benannt:

P1: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

P3: $\left(a^x\right)^y \cdot = a^{x \cdot y}$

P4: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Hinzu kommt eine Vernetzung mit Wurzeln als spezielle Regel *P5*: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in IN)$

P5 soll in der 3. Unterrichtseinheit entdeckt werden und ist ein Schlüssel dafür, wie schnell die Lernenden Zugang zu der Idee „gleicher Zeitraum, gleicher Änderungsfaktor“ finden.

Natürlich ist es im Sinne eines reduzierten Axiomensystems möglich, *P4* mit *P3* aus dem Spezialfall $a^{-1} = \frac{1}{a}$ zu gewinnen oder gleich aus *P1* abzuleiten. Jedoch wird dieses deduktive Vorgehen nicht der didaktische Zugang sein, bei dem die kontextbezogene Strategie „einen Wachstumsprozess rückwärts verfolgen“ die Grundvorstellung der Division anspricht (3. Unterrichtseinheit). Grundsätzlich sollten bei der Auswertung von Übungen auch die formale Bedeutung der Regeln und ihr innerer Zusammenhang exemplarisch angesprochen werden. So kann z.B. verstanden werden, wie *P3* für natürliche Exponenten aus *P1* folgt, wenn man rechnet: $\left(a^4\right)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3}$.

Eine Sonderstellung nimmt die Regel *P2* ein. Sie wird innerhalb eines Wachstumsprozesses mit festem Wachstumsfaktor nicht benötigt. Daher wurde eine Aufgabe (2. Unterrichtseinheit, Aufgabe 2) aufgenommen, die es erlaubt, auch diese Regel im Kontext zu entdecken.

Auf eigene Regeln mit Quotienten und Differenzen wird nicht nur mit Blick auf ein möglichst reduziertes Regelsystem verzichtet, sondern auch, weil die genannten Rechenarten i.d.R. nur im Zusammenhang mit Umkehraufgaben auftreten. In der vorliegenden Reihe wird an gegebener Stelle (3. und 4. Unterrichtseinheit) das Problem im Kontext mit der Regel *P4* gelöst.

Unterrichtsmaterial

1. Unterrichtseinheit

Das Prinzip exponentiellen Wachstums erarbeitet an einem Gedankenexperiment (Einzelstunde)

Material

Eine vollständige Verpackungseinheit 500 Stück Kopierpapier, ggf. Fehlkopien zum Experimentieren.

Aufgabe

a) *Falte ein DIN A4-Blatt Papier so oft wie möglich und miss die Dicke des Papierstapels. Gib die Dicke an, die sich nach ein [zwei, drei] weiteren, theoretisch denkbaren Faltungen ergeben müsste.*

Die nachstehenden Aufgaben sind als Gedankenexperiment einzuordnen.

b) *Nutze den Stapel Kopierpapier, um eine Vorhersage über die Dicke des Papierstapels nach 10-, 20-, 30- und 40-maligem Falten zu machen.*

c) *Berechne, wie oft man mindestens falten müsste, um die Höhe des Eiffelturms (324 m) zu übertreffen.*

Ziel der Sicherung

Die charakteristische Zunahme exponentieller Wachstumsprozesse soll in dem gewählten Kontext eindrücklich deutlich werden, wobei die Modellhaftigkeit durch die Betonung der Grenzen zwischen Experiment und seiner gedanklichen Fortsetzung offen angesprochen wird. Die im Zusammenhang mit Fermi-Aufgaben geübten Kompetenzen des Schätzens, Messens, Umwandelns von Einheiten und Überschlagens können genutzt werden. Gesichert wird zunächst die Regel *P1*.

Eine Überschlagsrechnung bei b) ergibt sich aus der Tatsache, dass nach 10-fachem Falten $1024 \approx 10^3$ Lagen Papier in etwa die Dicke von 1 dm aufweisen. Daraus kann geschlossen werden, dass nach 20-fachem Falten 10^6 Lagen einen ca. 100 m dicken Stapel und nach 30-fachem Falten 10^9 Lagen einen ca. 100 km dicken Stapel bilden. So werden die Grundkenntnisse über das Rechnen mit Zehnerpotenzen auch reaktiviert. Dies wird auch dadurch unterstützt, dass die Zahl 2^{40} vom Rechner in der wissenschaftlichen Schreibweise angezeigt wird. Das Vorgehen kann durch die Regel *P3* beschrieben werden, z. B.: $2^{40} = (2^{10})^4 \approx (10^3)^4 = 10^{12}$. Der Fehler bei der Überschlagsrechnung liegt noch unter 10 %.

Um den Modellierungsaspekt aufzugreifen, sollte der Fehlvorstellung begegnet werden, durch Vergrößerung des Papierformates ließe sich die Zahl möglicher Faltungen nennenswert steigern.

2. Unterrichtseinheit

Vergleich von exponentiellem und linearem Wachstums am Beispiel von Verzinsung mit dem Ziel, den Begriff des Wachstumsfaktors zu erarbeiten (Doppelstunde)

Aufgabe 1

Zur Geburt haben Konstantins Großeltern ihrem Enkel einen Sparbrief über $K_0 = 5.000$ € mit 18-jähriger Laufzeit geschenkt, um ihn damit später einmal in der Studentenzeit zu unterstützen. Damals gab es Jahreszinsen von 5 %. Die Zinsen wurden am Jahresende dem Kapital des Sparbriefes zugeschlagen und in der Folgezeit mitverzinst.

Julias Großeltern haben bei Julias Geburt $K_0 = 5.000$ € zum Festzins von 5 % für 18 Jahre bei ihrer Bank angelegt und ihrem Enkelkind ein leeres Sparschwein mitgebracht. Seitdem schenken sie Julia jedes Jahr zum Geburtstag die Zinserträge. Dieses Geld wird dann feierlich in dem Sparschwein versenkt. Zum 18-ten Geburtstag darf Julia das Sparschwein schlachten und soll dann auch das frei werdende Kapital K_0 für eine größere Anschaffung erhalten.


Abbildung 1: Julias Sparschwein [1]

Um die Erträge dieser beiden Geldanlagen (Sparbrief versus Sparschwein) zu vergleichen, stelle das dem jeweiligen Kind gehörende Kapital K_n nach n Jahren in einer Tabelle dar.

Ziel der Sicherung

In der Aufgabe kann der Zinssatz variiert werden. Eine weitere Öffnung ist möglich, wenn man die beiden Sparbriefe mit unterschiedlichen Zinssätzen ausstattet.

Die tabellarische Gegenüberstellung mit dem *GTR* kann noch durch eine graphische Darstellung unterstützt werden. Entscheidend ist es, den Unterschied eines festen Wachstumsfaktors und eines festen Summanden zu verdeutlichen. Dies kann graphisch durch entsprechend beschriftete Stufen verdeutlicht werden, welche beim linearen Wachstum als Steigungsdreiecke zu deuten sind.

Bei der Verdichtung der Ergebnisse auf die Formeln $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$ und $K_n = K_0 \cdot (1+p \cdot n)$ können die Variablen auch z. T. als Zahlenwerte belassen werden.

Aufgabe 2

Der sogenannte **Realwert** eines Geldbetrages, also seine Kaufkraft, wird durch die Inflation ständig vermindert. Dies wird ausgeglichen, indem man das Geld „arbeiten“ lässt. Die einfachste Möglichkeit stellt die Anlage bei einer Bank dar, welche das Geld investiert und dem Sparer eine „Leihgebühr“ in Form von Zinsen entrichtet. Dadurch steigt zumindest der **Nominalwert**, also der auf dem Papier des Kontoauszugs stehende Wert.

Berechne für die kommenden 10 Jahre den Nominalwert und den Realwert eines thesaurierend angelegten Kapitals $K_0 = 2.000$ € unter der Bedingung, dass die Inflationsrate bei 3 % und der Zinssatz bei 4 % [3 %, 2 %] liegen. Vergleiche die Ergebnisse für unterschiedliche Zinssätze.

Gib an, um welchen Faktor und um welchen Prozentsatz sich der Nominalwert bzw. der Realwert unter diesen Bedingungen nach n Jahren vermehrt [vermindert].

Wie lässt sich der Realwert nach n Jahren aus dem Nominalwert berechnen?

Ziel der Sicherung

Die Lernenden können die Entwicklung des Realwertes berechnen, indem sie die Wachstumsfaktoren für Inflation und Verzinsung in jedem Jahr auf das Kapital anwenden. Der Vergleich mit dem Nominalwert nach *n* Jahren legt die Frage nahe, welcher Faktor den Realwert aus dem Nominalwert hervorgehen lässt. So kann gesichert werden: $2000\,€ \cdot (1{,}04 \cdot 0{,}97)^n = 2000\,€ \cdot 1{,}04^n \cdot 0{,}97^n$ (Regel *P2*). Diese Regel findet sonst an keiner anderen Stelle des Unterrichtsvorhabens einen Platz.

Die Aufgabe ermöglicht auch eine erste, frühzeitige Auseinandersetzung mit exponentiellen Zerfallsprozessen und der Erfahrung, dass sich Wachstumsfaktoren kleiner als 1 genauso wie solche über 1 handhaben lassen. Dabei kann ein bereits in Klasse 7 thematisierter kognitiver Konflikt wiederaufgegriffen werden: Eine Inflation von 3 % wird nicht durch Zinsen in Höhe von 3 % ausgeglichen (Verweis auf die 3. binomische Formel).

[1] Quellennachweis: http://pixabay.com/de/sparschwein-penny-bank-spardose-146311/ , letzter Zugriff am 13.05.2014

3. Unterrichtseinheit

Beschreibung eines kontinuierlichen Wachstumsprozesses durch eine Exponentialfunktion als Zugang zur kontextgestützten Deutung nicht-natürlicher Potenzen (Einzelstunde)

Aufgabe, 1. Teil

Mit 68.870 km² Fläche ist der Viktoriasee der größte See in Afrika und nach dem Kaspischen Meer und dem Oberen See auch der drittgrößte See (und der zweitgrößte Süßwassersee) der Erde. Er ist etwa so groß wie Irland.

Neben anderen Umweltproblemen leidet der See darunter, dass er von Wasserhyazinthen überwuchert wird. Die überwucherte Fläche vergrößert sich ohne Gegenmaßnahmen im Monat auf das dreifache. Dabei wird vereinfachend von jahreszeitlichen Schwankungen abgesehen.

a) *Fülle Tabelle 1 aus (1 Monat = 30 Tage). Wähle eine geeignete Einheit und runde auf ganzzahlige Werte (Hilfe:* $1\ ha = 100\ m \cdot 100\ m$ *). Stelle die zugehörigen Rechnungen mit den exakten Ergebnissen übersichtlich im Heft dar.*

Tabelle 1	Zeit t	0	$\frac{1}{3}$ Monat	$\frac{1}{2}$ Monat	1 Monat	$1\frac{1}{2}$ Monate	7 Monate
	Fläche A	200 m²					

b) *Bestimme, wie groß die überwucherte Fläche einen Monat vor Beginn der Messungen war.*

✂---

Aufgabe, 2. Teil

c) *Fülle Tabelle 2 aus (1 Monat = 30 Tage). Wähle eine geeignete Einheit und runde auf ganzzahlige Werte (Hilfe:* $1ha = 100m \cdot 100m$ *). Stelle die zugehörigen Rechnungen mit den exakten Ergebnissen übersichtlich im Heft dar.*

Tabelle 2	Zeit t	t = 0	1 Tag	2 Tage	5 Tage	10 Tage	365 Tage
	Fläche A						

d) *Beschreibe das Wachstum der Fläche, die durch Hyazinthen bedeckt ist, durch eine Exponentialfunktion* $t \mapsto A(t) = 200 \cdot a^t$ *, wobei die Zeit* t *in Monaten zu messen ist.*
Berechne $A(-2,5)$ *und interpretiere das Ergebnis mit Blick auf die Situation des Viktoriasees.*

Zum Üben und Vertiefen*:*

e) *Berechne, wie groß eine von Hyazinthen bedeckte Fläche sein müsste, die sich binnen eines Jahres auf den gesamten See ausweiten würde.*

f) *„Wenn schon 1 % des Viktoriasees mit den Hyazinthen überwuchert sind, so dauert es 126 Tage, bis der See zugewuchert ist.“ Bestätige diese Aussage durch eine Rechnung.*

Ziel der Sicherung

Die problemorientierte Erarbeitung des exponentiellen Wachstumsmodells im 1. Aufgabenteil stellt die Bedeutung nicht natürlicher Exponenten in den Mittelpunkt. Methodisch bietet sich ein Dreischritt (ich – du – wir) an. Der zweite Teil der Aufgabe darf erst später verteilt werden, da sonst das fertige Modell vorweggenommen wird und die Schüler nur noch schwer zu bewegen sind, den Sinn der Festsetzung $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ (Regel *P5*) zu reflektieren. Es soll deutlich werden, dass die Rechnung $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ (*P1*) sowohl aus dem Kontext heraus sinnvoll ist als auch einem innermathematischen Permanenzprinzip genügt. Weitere Beispiele bieten sich an: $a^{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = a \cdot a^{\frac{1}{2}}$ und $a^{\frac{1}{2} \cdot 3} = (a^{\frac{1}{2}})^3$ (*P3*).

In Teilaufgabe b) lösen die Lernenden das Problem durch Rückwärtsrechnen, also durch Division. Dieses Vorgehen wird unter d) wiederaufgegriffen, um Potenzen mit negativen Exponenten zu definieren.

Im 2. Aufgabenteil wird unter c) zunächst die Verallgemeinerung $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (*P5*) von $n = 2$ auf $n = 30$ vorgenommen. Daraus kann die Definition abgeleitet werden: $a^{\frac{k}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^k = \sqrt[n]{a}^k$. Diese Festlegung scheint nach dem Mechanismus des Hyazinthenwachstums plausibel und genügt formal einem Potenzgesetz (*P3*).

Die Teilaufgabe d) erlaubt mit Bezug auf b) negative Potenzen durch $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (*P4*) zu definieren. Dementsprechend ist $A(-2,5) = 200 \cdot 3^{-2,5} = \dfrac{200}{3^{2,5}}$.

Im ersten Zugriff genügt in der Aufgabe eine exemplarische Sicherung aller angesprochenen Potenzrechenregeln.

Die weiteren Bestimmungsaufgaben e), f) zum Üben und Vertiefen fordern die Problemlösekompetenz und speziell den richtigen Umgang mit Einheiten heraus. Dabei können Abweichungen, die sich aus der Verwendung des monatlichen Wachstumsfaktors in 12. Potenz und des täglichen Wachstumsfaktors in 365. Potenz ergeben, unter dem Aspekt diskutiert werden, dass kleine Abweichungen bei der Modellierung zu beträchtlichen Abweichungen bei Vorhersagen mit dem Modell führen können. In Teil f) kann man betonen, dass die Größe des Sees aus der Rechnung herausfällt, also eine reine Aussage über Wachstumsfaktoren gemacht wird.

Eine kritische Betrachtung des Modells ist in dieser Aufgabe zwar möglich, würde jedoch den zeitlichen Rahmen sprengen. Auch liegt der Fokus auf dem Ziel, die grundlegenden Eigenschaften des für die Lernenden neuen mathematischen Modells im gegebenen Kontext soweit zu verstehen, dass ein Transfer auf andere Kontexte möglich wird.

4. Unterrichtseinheit

Modellierung einer Messreihe durch eine Exponentialfunktion am Beispiel des Bierschaumzerfalls (Einzelstunde)

Material

Ein Datensatz oder ein (ggf. selbst erstelltes) Versuchsprotokoll zum Auswerten. Unterstützend kann eine Abbildung zum Einsatz kommen.

Abbildung 2: Zerfall einer Schaumkrone. Bildquelle und Rechte: U. Brinkmann, Gymnasium Rahden

Das Bierglas in der Abbildung wurde im Abstand von einer Minute aufgenommen.

Das Bild kann als Hintergrundbild auf der Arbeitsfläche im *GTR* hinterlegt werden.

Bei der Aufnahme von eigenen Messwerten ist zu beachten, dass die Schaumkrone keine festliegende Untergrenze hat, sondern der Flüssigkeitsspiegel zumindest zu Beginn erkennbar ansteigt. In der Bildsequenz ist dieser Effekt minimal. Wer genau hinsieht, erkennt, dass der Eindruck eines Graphen aus Schaumsäulen nur erzeugt werden konnte, indem das erste Glas in der Fotomontage leicht angehoben wurde.

Aufgabe

In einem Bierglas wurde die Höhe der Schaumkrone beginnend etwa eine halbe Minute nach dem Einschenken gemessen.

Zeit / min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Höhe / cm	5,8	4,6	3,5	2,5	1,8	1,6	1,2	1,1	1,0

a) *Lege mit dem GTR eine Tabelle in Spalten an, in der zusätzlich zu den Messwerten in einer dritten bzw. vierten Spalte die Differenzen bzw. Quotienten aufeinanderfolgender Schaumhöhen abzulesen sind.*
Beurteile anhand der Differenzen bzw. Quotienten, wie gut sich die gemessene Schaumhöhe als Funktion der Zeit durch eine lineare bzw. exponentielle Funktion beschreiben lässt.

b) *Erstelle mit dem GTR aus den Messwerten ein Diagramm. Zeichne in dieselbe Graphik einen Funktionsgraphen, welcher sich möglichst gut an das aus den Messwerten erstellte Diagramm anpasst.*

c) *Vergleiche die diskutierten (und ggf. weitere infrage kommende) Modelle auch mit Blick auf die Brauchbarkeit zur Prognose des weiteren Verlaufs des Schaumzerfalls.*

Vertiefungsaufgaben

d) *Forme die unter b) ermittelte Exponentialfunktion* $h(t) = c \cdot a^t$ *so um, dass die Einheiten „s“ und „mm“ verwendet werden.*

Lässt man die Bildfolge der Biergläser als Daumenkino rückwärts laufen, so erhält man den Eindruck einer wachsenden Schaumkrone.

e) *Bestimme den zugehörigen Wachstumsfaktor.*

Ziel der Sicherung

Die ersten drei Teilaufgaben sind vor allem unter Modellierungsaspekten zu betrachten. Die Vertiefungsaufgaben sollen separat ausgegeben werden, damit keine zu frühe Festlegung auf ein exponentielles Modell hindurchschimmert.

Teilaufgabe a) soll bewusst nur auf Grundlage der Daten gestellt werden, um eine Suggestion des anzuwendenden Modells durch eine Graphik oder die Fotomontage zu vermeiden. Da die Modellierung im Umfeld des Themas schwerlich als offen angesehen werden kann, werden die bekannten Modelle vorgegeben. Dass Lernende auch Potenzfunktionen ins Spiel bringen, erscheint nur dann wahrscheinlich, wenn zuvor diese Funktionen in entsprechender Breite behandelt wurden. Der Fokus liegt darauf, einerseits die Differenzen und andererseits die Quotienten zu untersuchen, um noch einmal das grundlegende Prinzip linearen und exponentiellen Wachstums - nun auch bei fallenden Funktionen - zu verdeutlichen:

Eine Größe entwickelt sich exponentiell wachsend bzw. fallend, wenn sie sich in festen Zeitintervallen um einen festen Faktor vergrößert bzw. vermindert.

Sowohl Differenzen als auch Quotienten erweisen sich im vorliegenden Fall über das Maß von Messfehlern hinaus als schwankend, so dass allein auf Grund der Datenlage keines der Modelle die Realität zufriedenstellend beschreibt. Jedoch deutet ein mit dem *GTR* aus der Tabelle erstelltes Säulendiagramm eher in Richtung eines exponentiellen Zerfalls. Unter c) kommt das auf die Asymptotik der Exponentialfunktion zielende qualitative Argument hinzu, dass die Schaumhöhe nicht negativ werden kann.

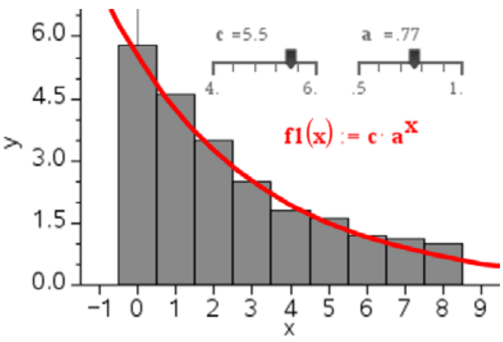

Abbildung 3: Einsatz von Schiebereglern zur Anpassung von Messwerten.

Der *GTR* soll bei der unter b) intendierten Regression nach Augenmaß dazu beitragen, Exponentialfunktionen $f(x) = c \cdot a^x$ mit unterschiedlicher Basis a und unterschiedlichem Streckfaktor *c* zu erkunden. Dies bereitet die nachfolgende Funktionenwerkstatt (5. Unterrichtseinheit) vor. Hilfreich ist der Einsatz des Schiebereglers. Ein mögliches Ergebnis ist in der Abbildung 3 dargestellt.

Es ist damit zu rechnen, dass die Lernenden nur den Wachstumsfaktor variieren, da ihnen der Anfangswert (im Rahmen der Messgenauigkeit) als „gegeben“ erscheint, während sie in den anderen Fällen eine gewisse Zufälligkeit unterstellen.

Mit dem Hintergrundbild der realen Biergläser kann noch enger am Versuch gearbeitet werden (siehe Abbildung 4).

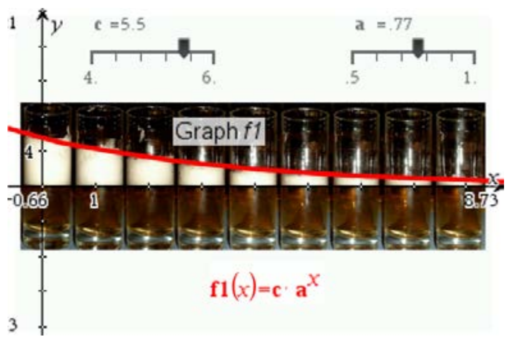

Abbildung 4:Hintergrundbild zur Vernetzung von Funktion und Realsituation.

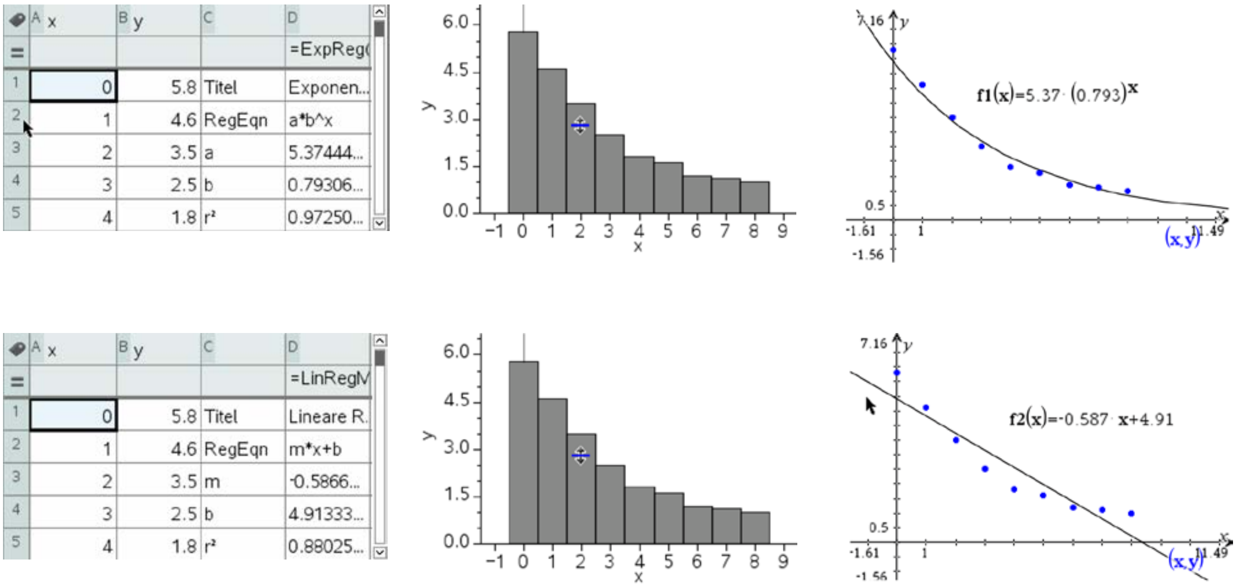

Abbildung 5: Vergleich zwischen exponentieller Regression (oben) und linearer Regression (unten)

Zur Modellkritik

Der Vergleich zwischen exponentieller und linearer Regression (Abbildung 5) zeigt deutliche Vorteile auf Seiten der ersteren. Die Vorstellung einer festen Zerfallsquote wird häufig durch ein idealisiertes Realmodell unterstützt. Dabei wird angenommen, dass ein zufälliges Zerplatzen der Schaumbläschen unter räumlich und zeitlich homogenen Bedingungen mit einer für feste Zeitintervalle konstanten Wahrscheinlichkeit erfolgt. Dieses z. B. beim radioaktiven Zerfall tatsächlich zutreffende Modell erweist sich jedoch nur als näherungsweise richtig, weil die postulierten Homogenitätsbedingungen nicht erfüllt sind und sich unterschiedliche Zerfallsmechanismen überlagern. Im Sinne des Modellierungszirkels könnte man das Modell z. B. durch Einführung einer Zeitabhängigkeit des Zerfallsfaktors modifizieren oder zwei exponentielle Zerfallsvorgänge überlagern, anstatt zu „optisch besseren“, aber rein deskriptiven Varianten Zuflucht zu nehmen. Diese weiterführenden Überlegungen können im Rahmen der Binnendifferenzierung oder der Fortsetzung des Themas in der Q-Phase in den Unterricht einfließen. Zum physikalischen Hintergrund des Bierschaumzerfalls gibt es eingehende Untersuchungen. [1] [2]

Bei der Aufnahme von Messwerten ist zu beachten, dass die Schaumkrone keine festliegende Untergrenze hat, sondern der Flüssigkeitsspiegel zumindest zu Beginn erkennbar ansteigt. In der Bildsequenz wurde dieses Problem durch leichtes Anheben des ersten Glases gelöst, um die Möglichkeit einer Anpassung der realen Schaumhöhen durch Funktionsgraphen zu schaffen. Separat ist ein Arbeitsblatt mit einer Bildsequenz hinterlegt, bei der eine schneller zerfallende Schaumkrone und ein deutliches Ansteigen der Schaumuntergrenze zu beobachten sind.

[1] Heike Theyßen: Mythos Bierschaumzerfall, Ein Analogon für den radioaktiven Zerfall?, in: Physik und Didaktik in Schule und Hochschule 2/8 (2009), S. 49-57

[2] Thomas Wilhelm (Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik, Julius-Maximilians-Univ. Würzburg): Der Bierschaumzerfall, http://www.thomas-wilhelm.net/Vortraege/Bierschaumzerfall.pdf, eingesehen am 1.3.2014

Zu den Vertiefungsaufgaben

Neu ist in d), dass der Wachstumsfaktor a an die vorgeschriebene Zeiteinheit „s“ anzupassen ist. Es ist dann $b = a^{60}$ der schon bekannte Wachstumsfaktor für 60 Sekunden. Hiermit werden das Wurzelziehen (*P5*) und die Arbeit mit dem Potenzgesetz (*P3*) wiederholt. Mögliches Vorgehen: $b^{\frac{1}{60}} = \left(a^{60}\right)^{\frac{1}{60}} = a^{\frac{60}{60}} = a$. Man kann den Einheitenwechsel von 1 min auf $1\,\mathrm{s} = \frac{1}{60}\,\mathrm{min}$ auch in der Funktionsgleichung vornehmen, indem man den Streckfaktor $\frac{1}{60}$ vor das Argument setzt (Vernetzung mit Transformationen).

Der unter e) verfolgte Grundgedanke, exponentiellen Zerfall und exponentielles Wachstum durch Zeitumkehr in Beziehung zu setzen, soll zur Vertiefung der Vernetzung von Potenz- und Bruchrechnung führen. Die nahe liegende Lösung, den gesuchten Wachstumsfaktor durch Rückwärtsrechnen mit dem Kehrwert zu ermitteln, soll in der Sicherung durch Regel (*P3*) untermauert werden. Es gilt: $h(-t) = c \cdot a^{-t} = c \cdot \left(a^{-1}\right)^{t} = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{t}$. Dies wird in der nachfolgenden 5. Unterrichtseinheit noch mit der Spiegelung des Graphen an der y-Achse in Verbindung gebracht.

5. Unterrichtseinheit

Eine Funktionenwerkstatt zu Exponentialfunktionen (Doppelstunde)

Material

Die theoretische Beschreibung von Exponentialfunktionen in der Form $f(x) = c \cdot a^x$ ($x \in IR$) wurde in der 4. Unterrichtseinheit vorbereitet. Dabei ist die Bedeutung von $a = \frac{f(1)}{f(0)} > 0$ als Wachstumsfaktor und von $c = f(0) > 0$ als Anfangswert oder Streckfaktor deutlich geworden. Die folgenden Aufgaben sollen zu gezielten Untersuchungen der Zusammenhänge zwischen Funktionsterm und Funktionsgraph anregen. Zugleich werden Basiskompetenzen im Gebrauch des *GTR* geschult.

Aufgabe 1: Funktionen beschreiben

Zeichne mit dem GTR den Graphen der Funktion $f_1(x) = 1{,}2^x$ im Bereich von -4 $\leq x \leq$ +4. Erstelle im gleichen Bereich eine Wertetabelle.

- *Gib den Schnittpunkt mit der y-Achse an.*
- *Welche y-Werte treten als Funktionswert von f_1 auf?*
- *Wie verhält sich der Graph für große x-Werte / für kleine x-Werte?*

Aufgabe 2: Welche Rolle spielt die Basis einer Exponentialfunktion?

Zeichne zusätzlich zum Graphen von f_1 noch den Graphen zu $f_2(x) = 2^x$.

Übertrage die Zeichnung als Skizze in dein Heft.

- *Welchen Punkt haben beide Graphen gemeinsam?*
- *Für welche x-Werte ist $f_1(x) < f_2(x)$?*
- *Ist es denkbar, dass noch ein zweiter Schnittpunkt existiert? Begründe!*

Trage in deine Skizze zusätzlich den Graphen zu $f_3(x) = 3^x$ so ein, wie er deiner Meinung nach in Bezug auf die beiden anderen verlaufen müsste.

Überprüfe deine Vermutung mit dem GTR und formuliere eine Regelmäßigkeit.

Aufgabe 3: Erkennst du ein Muster?

Lösche alle Funktionen. Gib dann nacheinander folgende Paare $f_i(x)$, $g_i(x)$ ein und lass dir die Graphen zeichnen. Schreibe deine Beobachtungen auf.

Übertrage für ein Paar die Zeichnung als Skizze in dein Heft.

(1) $f_1(x) = 2^x$	(2) $f_2(x) = 1{,}5^x$	(3) $f_3(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
$g_1(x) = 0{,}5^x$	$g_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	$g_3(x) = 0{,}75^x$

Erkläre deine Beobachtungen aus der Kenntnis von Potenzrechenregeln.

Ziel der Sicherung

Die Aufgabenformate gleichen grundsätzlich denen, die für lineare Funktionen und ihre Graphen produktiv sind. Die drei Aufgaben verfolgen die nachstehenden Zielsetzungen:

- Durch Variation der Scharparameter a bzw. *c* kann mit dem *GTR* erkundet werden, wie diese Parameter den Verlauf der Funktionsgraphen qualitativ beeinflussen.
- Die Lagebeziehung zwischen zwei Exponentialfunktionen kann erklärt werden.
- Die Spiegelsymmetrie zwischen den Graphen zu $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ kann entdeckt werden.

Weitere Aufgabenformate

Hier bieten Schulbücher i. d. R. genügend Aufgaben, die zu einer Lernumgebung zusammengestellt werden können.

- Bewährt haben sich Problemaufgaben, bei denen Zuordnungen zwischen unskalierten Graphen und Funktionsgleichungen herzustellen sind.
- Zum exakten Ablesen der Parameter a und *c* aus skalierten Graphen sind die Funktionswerte an den Stellen 0 und 1 bequem. Kreative Probleme ergeben sich, wenn das Sichtfeld auf einen anderen Bereich eingeschränkt wird.
- Weiterführend und vorbereitend auf die Q-Phase kann die Variation des Wachstumsfaktors durch Stauchung in x-Richtung erzeugt werden, indem z.B. in $f(x) = 2^{r \cdot x}$ ein Parameter *r* variiert wird. Hierbei bietet sich wieder die Gelegenheit, eine Potenzrechenregel (*P3*) zu thematisieren.
- Der Sonderfall $a = 1$ bietet Anlass zu klärenden Diskussionen.
- Wachstumsfaktoren sollten zunehmend auch mit prozentualen Änderungen in Verbindung gebracht werden. Dabei können die bereits in Jahrgangsstufe 7 thematisierten kognitiven Konflikte wiederaufgegriffen werden, z. B.: Eine Inflation von p % wird nicht durch Zinsen in Höhe von p % ausgeglichen (Verweis auf 3. binomische Formel, vgl. 2. Unterrichtseinheit).

6. Unterrichtseinheit

Wie man eine Exponentialfunktion durch zwei Punkte legt (Einzelstunde).

Aufgabe

Ebenso wie eine Gerade mit einer Funktionsgleichung der Form $g(x) = b + m \cdot x$ ist auch eine Exponentialfunktion mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = c \cdot a^x$ durch zwei verschiedene Punkte auf dem Graphen eindeutig festgelegt.

a) *Bestimme der Reihe nach die Parameter* a *und c einer Exponentialfunktion, deren Graph durch die beiden gegebenen Punkte P, Q verläuft.*

(1) P(0|3), Q(1|8)	*(2) P(2|2,7), Q(3|8,1)*
(3) P(4|3,7), Q(5,5|10)	*(4) P(2,4|3,7), Q(5,1|9,2).*

b) *Vergleiche unterschiedliche Wege zur Lösung von Beispiel (4).*

c) *Erkläre, warum eine Exponentialfunktion mit einer Funktionsgleichung der Form* $f(x) = c \cdot a^x$ *durch Angabe zweier verschiedener Punkte auf dem Graphen eindeutig bestimmt ist.*

Ziel der Sicherung

Die vier Beispiele in a) sind didaktisch gestaffelt. Während (2) noch ad hoc anhand einer Skizze durch schrittweises Probieren (sogar im Kopf) zu lösen ist, muss man bei (3) den Wachstumsfaktor a aus dem Faktor $a^{1,5}$ berechnen und dann 4 Schritte von P zum Startpunkt $\left(0\,|\,c\right)$ auf der y-Achse zurückrechnen (3,7 geteilt durch a^4). Um das Ergebnis (4) $f(x)=1{,}65\cdot 1{,}40^x$ zu bekommen, hat man es schwerer, zum Startpunkt $\left(0\,|\,c\right)$ zurückzurechnen. Dafür können die Lernenden unterschiedliche Strategien entwickeln – selbständig und mit geeigneten Impulsen (Möglichkeit eines Gruppenpuzzles bei b)).

1. Durch Verallgemeinern des zuvor benutzten Verfahrens. Man rechnet sozusagen 2,4 Schritte zurück, teilt also z.B. 3,7 durch $a^{2,4}\approx 1{,}40^{2,4}$.
2. Durch Verschieben um 2,4 in x-Richtung lässt sich das Problem auf den bereits gelösten Spezialfall zurückführen, in dem P(0|c) auf der y-Achse liegt: $f(x)=3{,}7\cdot 1{,}40^{x-2,4}$.
3. Durch Einsetzen eines Punktes in $f(x)=c\cdot 1{,}40^x$ lässt sich eine Gleichung aufstellen und nach c auflösen.
4. Alternativ können auch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten a, c aufgestellt und z. B. durch Division der Gleichungen gelöst werden.

Besonders das letzte Verfahren Nr. 4 soll in c) reflektiert werden und an ähnliche Erfahrungen mit linearen Gleichungssystemen erinnern.

Leistungsstärkere Lernende können die Analogien z.B. durch Abstraktion der Formel $a=\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}}$ erweitern, die der bekannten Formel $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=(y_2-y_1)\cdot\dfrac{1}{x_2-x_1}$ entspricht. Solche strukturellen Überlegungen tragen zum Kalkülverständnis bei.

Für andere Lernende ist es dagegen notwendig, durch Übung die Geläufigkeit des entwickelten Kalküls zu verbessern. Dazu sind Variationen wie negative x-Koordinaten, Wachstumsfaktoren $a<1$ und vertauschte Punkte (Q links von P) geeignet.

Lehrplanbezug

Thema: *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen • beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung*(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und grafikfähige Taschenrechner • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt (solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich in einer von drei Wochenstunden, ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen). Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen. *Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschülerinnen und Mitschüler (z. B. durch Kurzvorträge) zu nutzen.* Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des *GTR* gerichtet werden. *Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden.* Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht. *Der entdeckende Einstieg in Transformationen kann etwa über das Beispiel „Sonnenscheindauer“ aus den GTR-Materialien erfolgen, also zunächst über die Sinusfunktion*. Anknüpfend an die Erfahrungen aus der SI werden dann quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformationsaspekt betrachtet. Systematisches Erkunden mithilfe des *GTR* eröffnet den Zugang zu Potenzfunktionen.

Diagnose

Hinweise zu den Diagnosebögen

Der Selbsteinschätzungsbogen zur Eingangsdiagnose nimmt Bezug auf die Potenzrechenregeln (*P1*,..., *P5*), die teilweise in der Sekundarstufe I angesprochen werden. Dies kann der Fall sein, wenn Fachschaften sich entschließen, dies (zumindest für die Schülerinnen und Schüler der eigenen Schule) durch entsprechende Unterrichtsreihen am Ende der Sekundarstufe I sicherzustellen. Der Kernlehrplan SI sieht jedoch nur eine Beschränkung auf Zehnerpotenzen und ein grundsätzliches Verständnis der Potenzschreibweise vor.

Die letzte Spalte für Angaben zum Selbstlernmaterial ist noch entsprechend den vorhandenen Materialien zu ergänzen. Für die Nachdiagnose wurde ein analoger Aufbau ohne diese Spalte gewählt, wobei die Aufgaben sich erkennbar eng an die Ausgangsdiagnose anschließen, um den Lernenden einen Vergleich zu erleichtern. Der zeitliche Abstand schließt dabei reines Auswendig-Merken weitgehend aus. Der zweite Diagnosebogen kann zugleich auch als Vorbereitung auf eine Leistungsüberprüfung genutzt werden.

In beiden Fällen wurde auf eine Vernetzung mit der Bruchrechnung verzichtet, da hierfür in der vorliegenden Sequenz kein Bedarf besteht. Vielmehr sind Regeln, wie sich Potenzen in Bezug auf Zähler und Nenner verhalten, in den Potenzrechenregeln *P2* und *P4* impliziert. Stattdessen wurden auch Dezimalbrüche als Basen genommen, um den exemplarischen Charakter der Zahlenbeispiele zu betonen.

Übergang SI-SII konkretisiert am Unterrichtsvorhaben zu exponentiellen Wachstumsprozessen

Selbsteinschätzungsbogen zum Thema „Potenzrechnung“ – Eingangsdiagnose

Name: ________________________________

Hinweis: Der Diagnosebogen ist ohne Hilfe eines Rechners auszufüllen.

Kompetenzen	*Da bin ich mir sicher. Das kann ich.*	*Da bin ich fast sicher. Ich rechne noch einige Aufga-*	*Da bin ich unsicher. Das übe ich noch weiter.*	*Das kann ich gar nicht.*	*Selbstlernmaterial*
1. Ich kann die wissenschaftliche Zahlenschreibweise in das Stellenwertsystem übersetzen. Aufgabe: $2{,}19 \cdot 10^7 =$ ______________________	☐	☐	☐	☐	
2. Ich kann das Vorzeichen von Potenzen bestimmen. Aufgabe: $(-0{,}7)^{365}$ *ist* ☐ *positiv* ☐ *negativ*					
3. Ich kann Produkte mithilfe von Potenzen zusammenfassen. Aufgabe: $(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)\cdot 7{,}5\cdot 7{,}5\cdot(-6)\cdot 7{,}5 =$ ___________	☐	☐	☐	☐	
4. Ich kann die Verzinsung eines Kapitals mithilfe von Potenzen eines Wachstumsfaktors berechnen. Aufgabe: *Gib einen Term für den Geldbetrag nach 8 Jahren an, wenn 15.000 € zu einem festen Zinssatz von 4 % angelegt werden und die Zinsen dabei stets dem Kapital gutgeschrieben werden.*	☐	☐	☐	☐	
5. Ich kann Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen (Regel *P1*). Aufgabe: $4^3 \cdot 4^7 \cdot 4 =$ _______	☐	☐	☐	☐	
6. Ich kann Potenzen mit gleichem Exponenten zusammenfassen (Regel *P2*). Aufgabe: $3^3 \cdot 4{,}2^3 \cdot (-5)^3 =$ _______	☐	☐	☐	☐	

7. Ich kann Potenzen von Potenzen zusammenfassen (Regel *P3*). Aufgabe: $\left(3^6\right)^5 =$ ______	☐	☐	☐	☐	
8. Ich kann Terme mit Potenzen entsprechend den drei Regeln *P1*, *P2*, *P3* zusammenfassen. Aufgaben: $4^3 \cdot x^7 \cdot \left(4x^2\right) =$ ________ $6,7 \cdot 11^k \cdot 11^6 \cdot 11^{2k} =$ ________ $\left(8^{10} \cdot a^7\right)^4 =$ ________	☐	☐	☐	☐	
9. Ich kann falsche Termumformungen berichtigen und den Fehler erklären. Aufgaben: $a^2 + 3^2 = (a+3)^2$ $a^2 + a^2 = a^4$ $(3x)^4 = 12x^4$ $2 \cdot x^5 = \left(2x^3\right) \cdot \left(2x^2\right)$	☐	☐	☐	☐	
10. Ich kann negative Exponenten mithilfe der Division deuten (Regel *P4*). Aufgaben: *Schreibe als Potenz*: $\frac{11^k \cdot 11^6}{11^{2k}} =$ ______ *Schreibe als Quotient und deute als Aufgabe zur Zinsrechnung:* $2500\,€ \cdot 1,05^{-7} =$ ________ .	☐	☐	☐	☐	
11. Ich kann Terme mit ganzzahligen Exponenten zusammenfassen. Aufgabe: $4,8^{12} \cdot 17^n \cdot 4,8^{-5} \cdot 17^{-3n} =$ __________	☐	☐	☐	☐	
12. Ich kann (Quadrat-)Wurzeln aus Produkten ziehen (Regeln *P3*, *P5*). Aufgaben: Ziehe die Wurzel soweit wie möglich: $\sqrt{36x} =$ ______ $\sqrt{13x^6} =$ ______ $\sqrt{5^2 + x^2} =$ ________	☐	☐	☐	☐	

Selbsteinschätzungsbogen zum Thema „Potenzrechnung" – Nachdiagnose

Name: ______________________________

Hinweis: Der Diagnosebogen ist ohne Hilfe eines Rechners auszufüllen.

Kompetenzen	*Da bin ich mir sicher. Das kann ich.*	*Da bin ich fast sicher. Ich rechne noch einige Aufgaben.*	*Da bin ich unsicher. Das übe ich noch weiter.*	*Das kann ich gar nicht.*
1. Ich kann die wissenschaftliche Zahlenschreibweise in das Stellenwertsystem übersetzen. Aufgabe: $3,64 \cdot 10^5 =$ ______________________	☐	☐	☐	☐
2. Ich kann das Vorzeichen von Potenzen bestimmen. Aufgabe: $(-1,4)^{366}$ *ist* ☐ *positiv* ☐ *negativ*				
3. Ich kann Produkte mithilfe von Potenzen zusammenfassen. Aufgabe: $8 \cdot 8 \cdot (-5,5) \cdot (-5,5) \cdot 8 \cdot 8 \cdot (-5,5) =$ ______________	☐	☐	☐	☐
4. Ich kann die Verzinsung eines Kapitals mithilfe von Potenzen eines Wachstumsfaktors berechnen. Aufgabe: *Gib eine Gleichung an, mit der sich berechnen lässt, wann sich ein Geldbetrag verdoppelt hat, wenn er zu einem festen Zinssatz von 3 % angelegt wird und die Zinsen dabei stets dem Kapital gutgeschrieben werden.*	☐	☐	☐	☐
5. Ich kann Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen (Regel *P1*). Aufgabe: $7 \cdot 7^{10} \cdot 7^3 =$ _______	☐	☐	☐	☐
6. Ich kann Potenzen mit gleichem Exponenten zusammenfassen (Regel *P2*). Aufgabe: $2^4 \cdot (-3,5)^4 =$ _______	☐	☐	☐	☐
7. Ich kann Potenzen von Potenzen zusammenfassen (Regel *P3*). Aufgabe: $\left(11^4\right)^5 =$ _______	☐	☐	☐	☐
8. Ich kann Terme mit Potenzen entsprechend den drei Regeln ***P1*, *P2*, *P3*** zusammenfassen. Aufgaben: $(8x)^2 \cdot \left(8x^2\right) =$ __________ $13^{2k-1} \cdot 13^{2k+1} =$ ___________	☐	☐	☐	☐
9. Ich kann falsche Termumformungen berichtigen und den Fehler erklären. Aufgaben: $x^2 - 5^2 = (x-5)^2$ $9 \cdot a^3 \cdot a^3 = \left(9a^3\right)^2$	☐	☐	☐	☐

10. Ich kann negative Exponenten mithilfe der Division deuten (Regel *P4*). Aufgabe: *Schreibe als Potenz*: $\frac{6^k}{6^2} \cdot 6^{-2} =$ _______	☐	☐	☐	☐
11. Ich kann Terme mit ganzzahligen Exponenten zusammen-fassen. Aufgabe: $19^{2-n} \cdot a^2 \cdot 19^n \cdot a^{-5} =$ _____________	☐	☐	☐	☐
12. Ich kann (Quadrat-)Wurzeln aus Produkten ziehen (Regeln *P3*, *P5*). Aufgabe: *Ziehe die Wurzel soweit wie möglich:* $\sqrt{49x^3} =$ _______	☐	☐	☐	☐

Leistungsüberprüfung

Name: ______________________________

Aufgabe

Der Luftdruck p nimmt in der Atmosphäre mit steigender Höhe h über dem Meeresspiegel ab, wobei h die Höhe in km über NN angibt und p in hPa gemessen wird. Die Tabelle zeigt mögliche Messwerte.

Höhe h / km	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Luftdruck p / hPa	1015	935	890	815	774	736	681	641	587	564

Die tabellierten Werte lassen sich mit einer Exponentialfunktion $p(h) = p_0 \cdot a^h$ beschreiben.

a) *Berechne aus den Messwerten zur Höhe $h = 1$ und $h = 4$ einen Funktionsterm, der diese beiden Messwerte exakt wiedergibt. Runde p_0 auf ganze Zahlen und a auf 4 Nachkommastellen genau.*

Im Folgenden soll der Funktionsterm $p(h) = 1013 \cdot 0{,}8823^h$ verwendet werden.

b) *Erstelle mit dem GTR eine Tabelle zur Funktion $p(h) = 1013 \cdot 0{,}8823^h$ und beurteile, wie gut sie zu den obigen Messwerten passt und ob bestimmte Veränderungen nötig sind.*
Dokumentiere deine Ergebnisse vollständig.

c) *Berechne, um wie viel Prozent der Luftdruck beim Aufstieg aus dem Basislager in 2800 m über NN auf 4700 m über NN abnimmt.*

d) *Berechne, um wie viel Prozent der Luftdruck beim <u>Abstieg</u> pro km zunimmt.*

e) *Forme den Term $p(h) = 1013 \cdot 0{,}8823^{8,848-h}$ in die Standardform $p(h) = p_0 \cdot a^h$ um. Nenne die verwendeten Regeln P1, ..., P5.*
Interpretiere die ausgerechneten Größen p_0 und a im Sachzusammenhang.

Regeln:

P1: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

P2: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

P3: $\left(a^x\right)^y \cdot = a^{x \cdot y}$

P4: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

P5: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in IN)$

Kompetenzraster zur Aufgabe zur Leistungsüberprüfung

Aufg.	Kompetenzen und Lösungshinweise	Punkte
a)	Wachstumsfaktor a aus $a^3 = \frac{587}{890}$ ermitteln.	2
	Wachstumsfaktor a berechnen und runden: $a \approx 0{,}8705$.	2
	Anfangswert p_0 aus $p(1) = p_0 \cdot a = 890$ ermitteln.	1
	Anfangswert berechnen und runden: $p_0 \approx 1022$.	1
b)	Eine Tabelle erstellen und dokumentieren.	3
	Feststellen, dass deutliche Abweichungen bei zu großen Funktionswerten auftreten.	2
	Folgern, dass der Wachstumsfaktor zu groß gewählt wurde.	1
c)	Höhendifferenz in km berechnen: 4,7 km – 2,8 km = 1,9 km.	1
	Wachstumsfaktor berechnen: $0{,}8823^{1{,}9} \approx 0{,}788$.	1
	Abnahme in Prozent ausdrücken: Der Luftdruck nimmt um 21 % ab.	1
d)	Kehrwert des Abnahmefaktors als Wachstumsfaktor für den rückwärts laufenden Prozess benutzen.	1
	Kehrwert von 0,8823 berechnen und in Prozent ausdrücken: Der Luftdruck nimmt pro km um 13,3 % zu.	1
e)	Die Regeln *P1* und *P4* nennen und zur Umformung anwenden: $p(h) = 1013 \cdot 0{,}8823^{8{,}848-h} = 1013 \cdot 0{,}8823^{8{,}848} \cdot 0{,}8823^{-h} \approx 335 \cdot 1{,}133^h$.	3
	Ergebnis im Sachzusammenhang interpretieren: $p_0 = p(0) \approx 335$ ist der Luftdruck (in hPa) auf 8848 m Höhe (auf dem Mt. Everest) zu Beginn des Abstiegs.	2
	$a = 0{,}8823^{-1} \approx 1{,}133$ ist der Faktor für die Zunahme des Luftdrucks pro km beim Abstieg (vgl. d)).	1
	Summe	**23**