



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten VERA-3
(3. Jahrgangsstufe)

Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG (TEIL II)

Fachdidaktische Orientierung
zur

Leitidee

Raum und Form

Einfach mal reinschauen...

*Inkl. Anregungen
für den Unterricht!*



Bereitgestellt zum VERA-Durchgang 2020/2021

Dieses Dokument wurde leicht angepasst. (08/2023)

Inhalt

1.	<i>Einleitung</i>	3
2.	<i>Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards</i>	3
2.1	Die Bildungsstandards Mathematik	3
2.2	Kompetenzstufen im Fach Mathematik.....	4
3.	<i>Die Leitidee Raum und Form</i>	7
3.1	Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?	7
3.2	Raumvorstellung	7
3.3	Begriffsverständnis.....	9
3.3.1	Intuitives Begriffsverständnis.....	9
3.3.2	Inhaltliches Begriffsverständnis	9
3.3.3	Integriertes Begriffsverständnis	9
3.3.4	Formales Begriffsverständnis	10
3.3.5	Strukturelles Begriffsverständnis	10
3.4	Geometrisches Zeichnen	10
4.	<i>Literaturverzeichnis</i>	11

Autor*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Anpassung 08/2023:

Grundlage dieses Dokuments sind die

„Didaktischen Handreichungen Teil II: Fachdidaktische Orientierung (*Zahlen und Operationen* und *Raum und Form*)“ des VERA-Durchgangs 2020/2021.

Zur einfacheren *thematischen Bereitstellung nach Leitideen* für die Website schulentwicklung.nrw.de wurde daraus die Handreichung für die einzelne Leitidee *Raum und Form* erstellt.

Einige Formatierungen wurden angepasst, als Kapitel 1 und 2 wurde die leicht aktualisierte Fassung von 2023 verwendet, ansonsten wurden keine inhaltlichen Änderungen vorgenommen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt.

Ferner wird der mathematische Kompetenzbereiche **Raum und Form** erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert.

Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die Domäne *Raum und Form* kurz eingegangen.

Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,¹
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,

¹ In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schüler*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schüler*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell² erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schüler*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

² Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

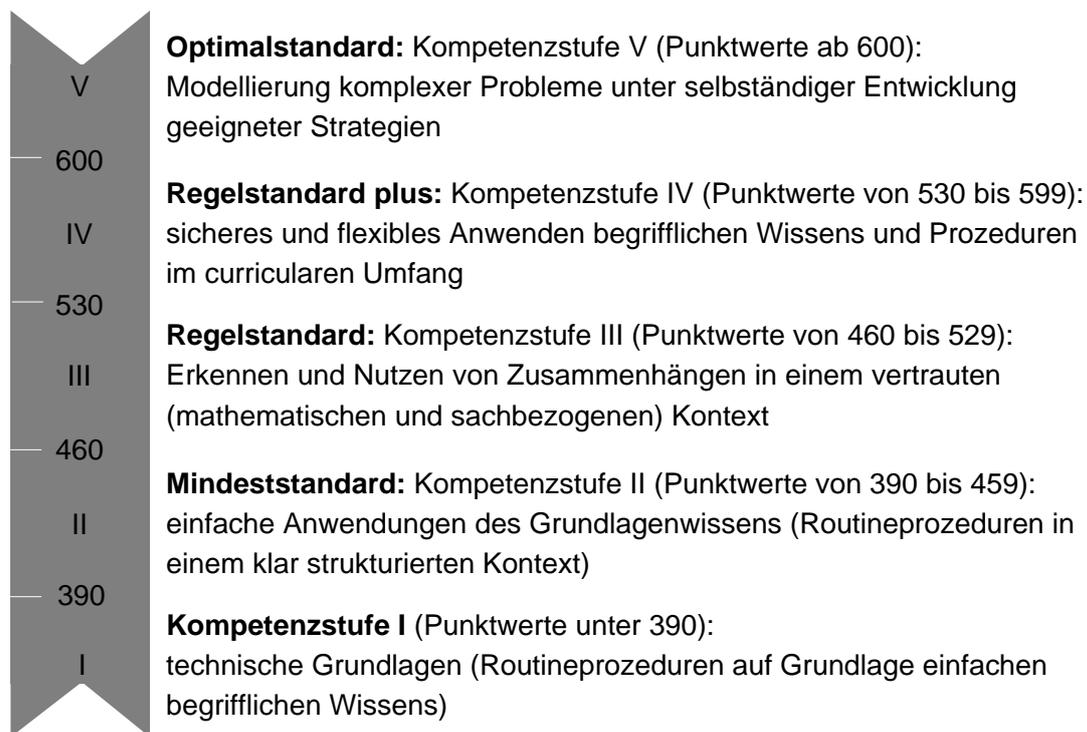


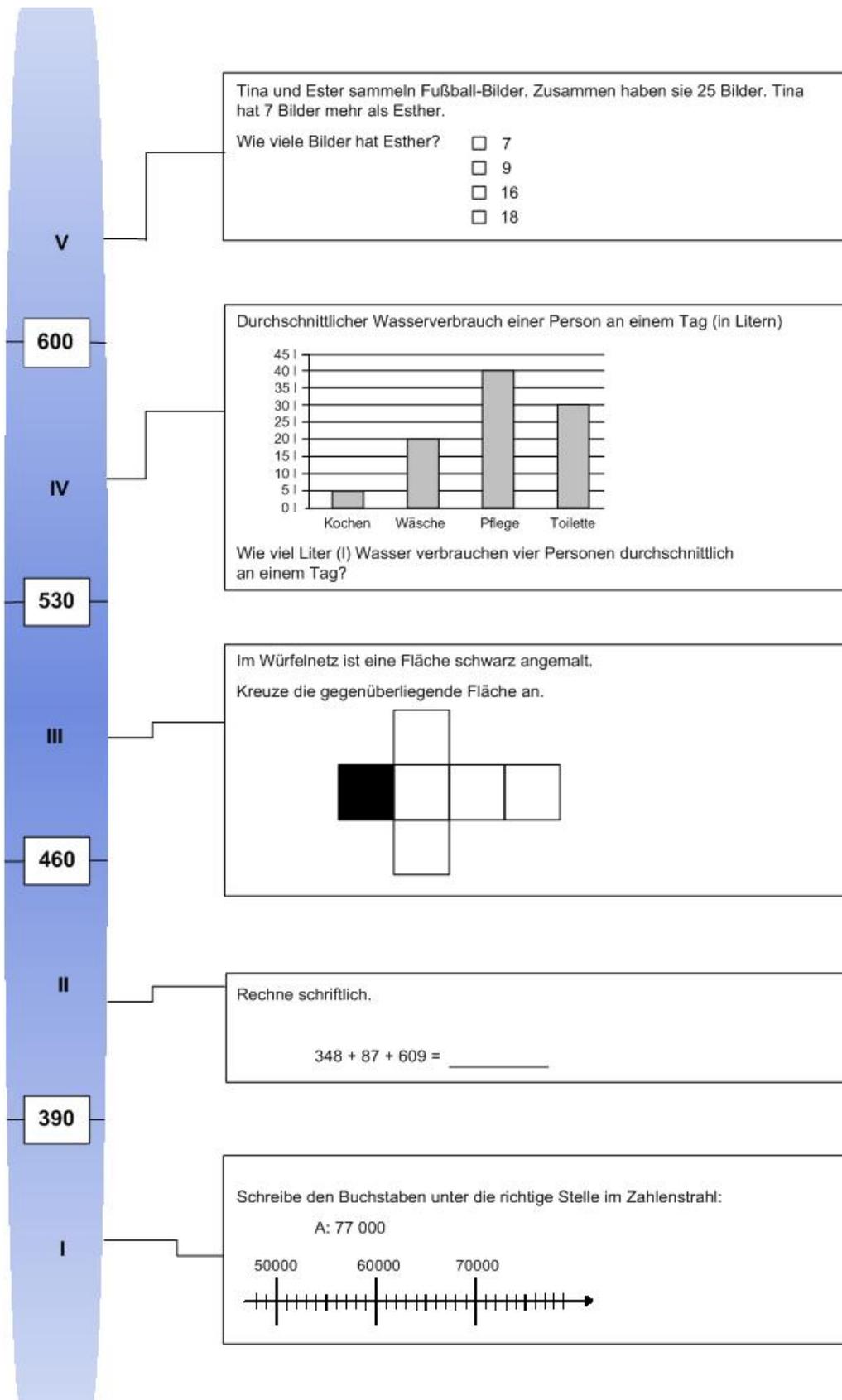
Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

Mindeststandard. Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schüler*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben s. S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013, abrufbar unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>

3. Die Leitidee *Raum und Form*

3.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich?

Die ersten geometrischen Kompetenzen entwickeln sich bei Kindern bereits ab der Geburt in der Interaktion mit ihrer Umgebung und durch eine vielfältige Wahrnehmung der Lebenswelt. Durch die Verarbeitung visueller Erfahrungen in Verbindung mit haptischen Reizen entstehen so z. B. Grundlagen für die Orientierung im Raum oder auch basale kognitive Fähigkeiten zur Klassifizierung von Objekten.

In der Schule sind diese Vorerfahrungen in vielen Bereichen Voraussetzung für gelingendes Lernen, so z. B. das sichere Erkennen von Raum-Lage-Beziehungen als Grundlage für das Lesen und Schreiben. Im Mathematikunterricht werden die vorhandenen geometrischen Fähigkeiten im Hinblick auf Objekte wie Flächen und Körper und darauf bezogene Prozesse – Bewegen (Abbildungen) – sowie das räumliche Vorstellungsvermögen allgemein anhand konkreter Handlungserfahrungen vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert.

Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle. Diese beiden Aspekte bedürfen, ebenso wie die in alle Bereiche hineinspielende Raumvorstellung, einer kontinuierlichen Förderung, die möglichst früh beginnen sollte.

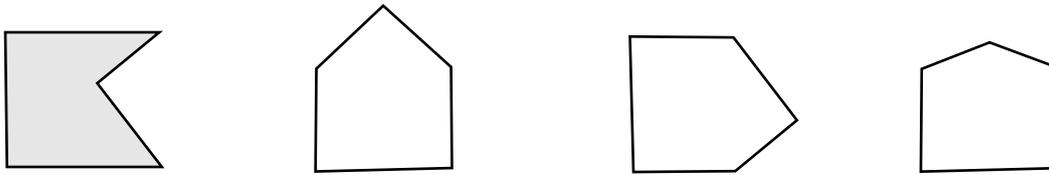
3.2 Raumvorstellung

Raumvorstellung umschreibt die Fähigkeit, „räumliche Objekte“ in Gedanken zu sehen und dabei mit den entstehenden Vorstellungsbildern aktiv umzugehen, etwa im Sinne einer mentalen Bewegung oder einer mentalen Vergrößerung bzw. Verkleinerung.

Mit „räumlichen Objekten“ assoziiert man dabei zumeist Objekte des dreidimensionalen Erfahrungsraumes, gemeint sind aber auch Objekte in einer Ebene oder in anderen „Räumen“, etwa auf einer Geraden oder auf einer Kugeloberfläche. In der Mathematik werden viele Objekte in „Räumen“ organisiert, etwa in „Zahlenräumen“, so dass der Begriff der Raumvorstellung dort eine umfassende Bedeutung erhält, der auch die Schulmathematik betrifft.

Diese Raumvorstellung ist bei den Schülerinnen und Schülern i. d. R. sehr unterschiedlich ausgeprägt; so gelingt z. B. das gedankliche Lösen kopfgeometrischer Aufgaben über mentales Operieren in ganz unterschiedlichem Maße. Da aber auch viele geometrische Sachverhalte über die räumliche Vorstellung erworben werden, ist die Förderung dieses Kompetenzbereichs von besonderer Bedeutung.

So kann z. B. die Gewinnung der Anzahl der Ecken eines Quaders oder einer vierseitigen Pyramide durch Abzählen an einem imaginären Objekt erfolgen. Auch Lagebeziehungen können in Gedanken verändert werden. Dies ist bei folgender Aufgabe erforderlich. Dort muss ein passendes Teil identifiziert werden:



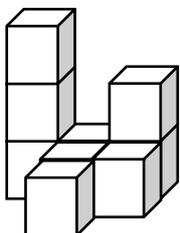
Die Fähigkeit, mental den Standort wechseln zu können, ermöglicht es, Bewegungen eines Körpers, hier eine Rotationsabbildung, als solche zu identifizieren:



Auch die Beziehung zwischen der dreidimensionalen Darstellung eines Objektes und der zweidimensionalen Ansicht von oben kann mithilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens hergestellt werden:



Diese Fähigkeit wird unter anderem bei der Zuordnung des richtigen Bauplans zu einem Körper benötigt:



3	1	1
0	1	1
0	1	0

3	1	2
1	1	1
0	1	0

3	1	2
0	0	1
0	1	0

3	1	2
0	1	1
0	1	0

3.3 Begriffsverständnis

Um Mathematik zu verstehen und im Unterricht über mathematische Sachverhalte zu sprechen, bedarf es eines einheitlichen Begriffsverständnisses. „Begriff“ ist dabei nicht allein als formales Unterscheidungsmerkmal im Sinne einer Wort-Sachverhalt-Zuordnung zu sehen. Mathematische Begriffe müssen mit Grundvorstellungen verknüpft werden. Vollrath (1984) unterscheidet **fünf Stufen des Begriffsverständnisses**, von denen primär die ersten drei von Relevanz für die Grundschule sind:

3.3.1 Intuitives Begriffsverständnis

Das Kind nimmt den Begriff als Phänomen in seiner Umwelt wahr. Dies ist die Grundlage für darauf aufbauende Begriffsbildungsprozesse. Im Unterricht ist daher der handelnde Erwerb von Erkenntnissen durch praktische Tätigkeiten wichtig, also das Anknüpfen an reale Erfahrungen aus der Umwelt.

3.3.2 Inhaltliches Begriffsverständnis

Der Begriff wird mit Eigenschaften verbunden, die in unterschiedlichen Darstellungen oder Objekten zum selben Begriff vorhanden sind. So kann z. B. ein Würfel anhand des Wissens über seine Eigenschaften als solcher identifiziert werden, unabhängig von seiner Größe oder Lage. Besonders stark verankert ist solches Wissen, wenn es durch den Vergleich mehrerer ähnlicher Abbildungen eigenständig angewandt werden kann:

Was ist die Besonderheit von Fig. 1 gegenüber Fig. 2, 3 und 4?

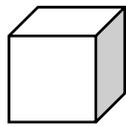


Fig. 1

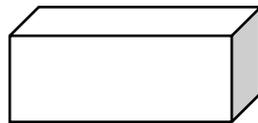


Fig. 2

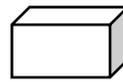


Fig. 3

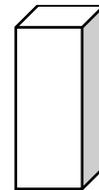


Fig. 4

3.3.3 Integriertes Begriffsverständnis

Der Begriff ist Teil eines Begriffsnetzes innerhalb dessen Zusammenhänge erkannt werden können. Diese Fähigkeit findet in der Grundschule Anwendung, wenn Begriffshierarchien, wie bspw. die im Folgenden geschilderte, erkannt und begründet werden können:



Ein Quadrat ist
zugleich ...



... ein Rechteck,

Ein Rechteck ist
zugleich ...



... ein Parallelo-
gramm,

... ein Parallelo-
gramm.



... eine Raute.

Für die Primarstufe von geringerer Bedeutung im Zusammenhang mit „Raum und Form“ sind die Stufen 4 und 5:

3.3.4 Formales Begriffsverständnis

Dies erfordert die Kenntnis verschiedener Definitionen und die Befähigung zur Anwendung im Rahmen von Beweisen.

3.3.5 Strukturelles Begriffsverständnis

Dieses weit gehende Begriffsverständnis, in dem der Begriff als strukturierbares Objekt erkannt und behandelt wird, setzt u. a. die Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen voraus.

3.4 Geometrisches Zeichnen

Das geometrische Zeichnen ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und entfaltet zugleich eine propädeutische Wirkung im Hinblick auf das Lernen und Arbeiten in den weiterführenden Schulen, u. a. als Grundlage für die Erstellung komplexerer Konstruktionen oder für die Darstellung in Koordinatensystemen. In der Primarstufe werden zunächst einfache geometrische Objekte zeichnerisch dargestellt.

In der praktischen Umsetzung fördert das geometrische Zeichnen die Feinmotorik der Kinder ebenso wie ihr ästhetisches Empfinden und kann so zu sorgfältiger und exakter Vorgehensweise motivieren. Durch das zeichnerische Nachvollziehen können geometrische Erkenntnisse erlangt, vertieft und gefestigt werden. Dies zeigt sich z. B. bei der Durchführung einer Achsenspiegelung an einer diagonal liegenden Achse. Sie erfordert die Kenntnis und konsequentere Anwendung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung als der „Standardfall“ einer senkrecht liegenden Achse. Neben dem Verstehen der Aufgabenstellung und dem Wissen um die durchzuführende Zeichenhandlung ist zusätzlich die motorische Fähigkeit zur zeichnerischen Umsetzung Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer solchen Aufgabenstellung.

In der Grundschule findet das geometrische Zeichnen u. a. Anwendung in Form von Freihandzeichnungen, Zeichnen von Strecken, geometrischen Figuren und Mustern, Verbinden von Punkten, Vergrößerungen und Verkleinerungen und im Zeichnen und Vervollständigen symmetrischer Figuren. Werden räumliche Figuren gezeichnet, beschränkt sich dies meist auf die Konstruktion von Schrägbildern einfacher mathematischer Körper (z. B. Quader).

Den didaktischen Kommentaren zu den einzelnen Bereichen in Teil III der Didaktischen Handreichungen ist jeweils eine Tabelle vorgeschaltet, aus der ersichtlich wird, ob bei den Aufgaben zusätzlich zur eigentlichen Anforderung Raumvorstellung, Begriffsverständnis und/oder geometrisches Zeichnen notwendig sind. Aufgaben, die mit „(x)“ gekennzeichnet sind, beschreiben Aufgaben, in welchen die jeweilige Fähigkeit die Lösung unterstützen kann, aber nicht muss. Aufgaben, die mit „x“ gekennzeichnet sind, können ohne die jeweilige Fähigkeit kaum gelöst werden.

4. Literaturverzeichnis

- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013): *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- KMK (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html>)
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik.
In: P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich.
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität.
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.