



Institut zur Qualitätsentwicklung  
im Bildungswesen

---

Vergleichsarbeiten VERA-3  
(3. Jahrgangsstufe)

# Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG (TEIL II)

---

Fachdidaktische Orientierung  
zur

Leitidee

**Muster und Strukturen**

*Einfach mal reinschauen...*

*Inkl. Anregungen  
für den Unterricht!*



Bereitgestellt zum VERA-Durchgang 2022

Dieses Dokument wurde leicht angepasst. (08/2023)

## Inhalt

1.	Einleitung.....	3
2.	Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards .....	3
	2.1 Die Bildungsstandards Mathematik .....	3
	2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik .....	4
3.	<b>Die Leitidee Muster und Strukturen</b> .....	7
	3.1 Die Bildungsstandards im Bereich Muster und Strukturen.....	7
	3.2 Hinweise für den Unterricht.....	8
4.	Weitere Anregungen für den Unterricht.....	11
5.	Abbildungsverzeichnis .....	13
6.	Literaturverzeichnis.....	13

Autor\*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

### Anpassung 08/2023:

Grundlage dieses Dokuments sind die

„Didaktischen Handreichungen Teil II: Fachdidaktische Orientierung *Muster und Strukturen* und *Größen und Messen*“ des VERA-Durchgangs 2022.

Zur einfacheren *thematischen Bereitstellung nach Leitideen* für die website [schulentwicklung.nrw.de](http://schulentwicklung.nrw.de) wurde daraus je eine Handreichung für jede Leitidee erstellt.

Einige Formatierungen wurden angepasst, als Kapitel 1 und 2 wurde die leicht aktualisierte Fassung von 2023 verwendet, ansonsten wurden keine inhaltlichen Änderungen vorgenommen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien  
auch online finden können?

[www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben](http://www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben)

# 1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt.

Ferner wird der mathematische Kompetenzbereiche ***Muster und Strukturen*** erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert.

Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die Domäne *Muster und Strukturen* kurz eingegangen.

Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

## 2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

### 2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler\*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler\*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,<sup>1</sup>
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,

---

<sup>1</sup> In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schüler\*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

## 2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schüler\*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler\*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell<sup>2</sup> erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schüler\*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

---

<sup>2</sup> Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

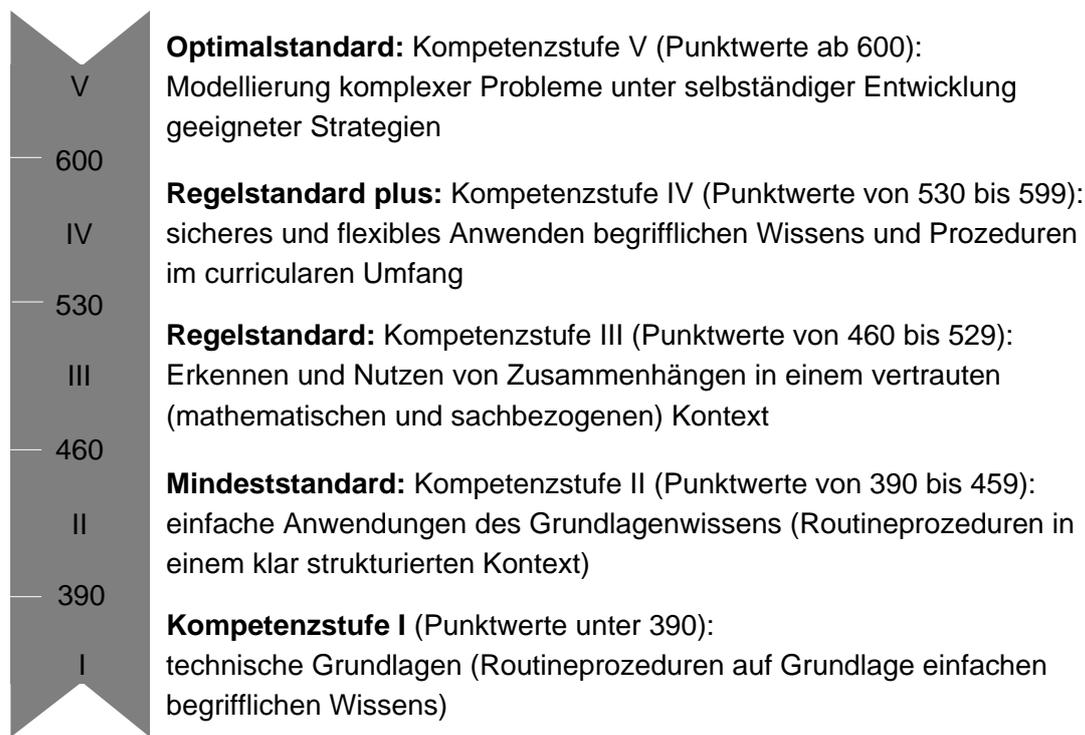


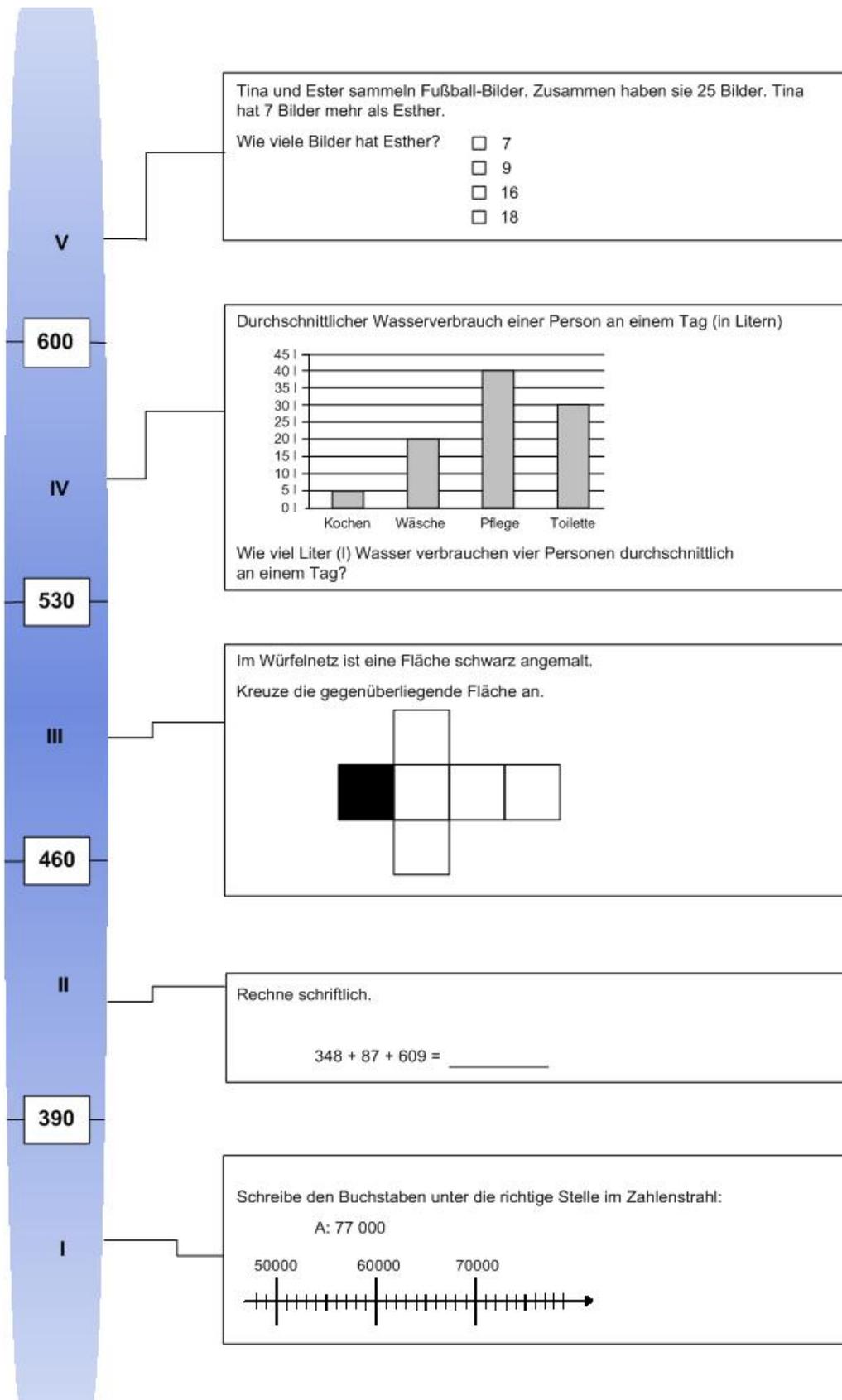
Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

**Mindeststandard.** Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler\*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler\*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

**Regelstandard.** Der *Regelstandard*, den die Schüler\*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler\*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler\*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben s. S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013, abrufbar unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>

### 3. Die Leitidee Muster und Strukturen

#### 3.1 Die Bildungsstandards im Bereich Muster und Strukturen

Der Kompetenzbereich *Muster und Strukturen* hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. Er zeichnet sich durch Vernetzungen mit allen anderen Kompetenzbereichen aus: Es gibt Verbindungen zu *Zahlen und Operationen*, zu *Raum und Form*, zu *Größen und Messen* und zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*. In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards umfasst die Leitidee Muster und Strukturen zwei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen:

- Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
- funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen<sup>3</sup>

#### Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

Wie die Aufgabe in Abbildung 3 zeigt, umfasst dieser Bereich Aufgaben, die auf den ersten Blick auch dem Bereich *Zahlen und Operationen* zugeordnet werden könnten. Bei der abgebildeten Aufgabe geht es um das Beschreiben einer Felddarstellung mithilfe einer Multiplikation. Aber es geht an dieser Stelle um mehr: Gegeben ist ein geometrisches Muster. Dieses soll erkannt und mit dem arithmetischen Muster in Verbindung gesetzt werden. Eine Seite des Rechtecks bleibt gleich, die andere wächst fortlaufend um eine Kästchenlänge. In der Multiplikation zeigt sich dies durch den gleichbleibenden Faktor 2 und den zweiten Faktor, der fortlaufend um eins größer wird.

Schreibe die passenden Mal-Aufgaben auf. Achte auf das Muster.

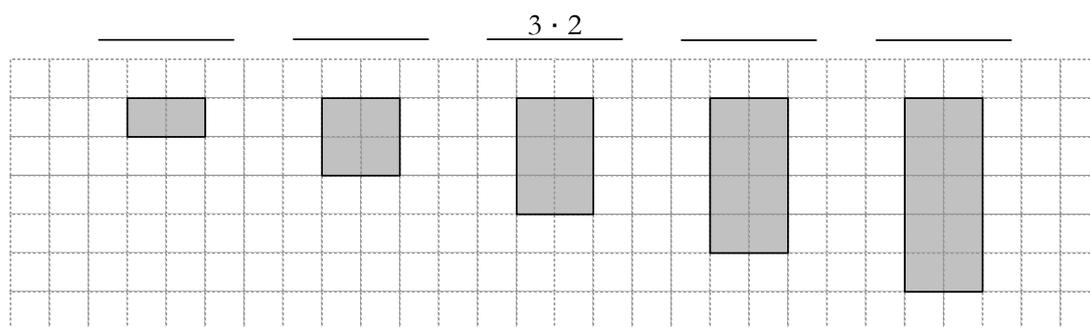


Abbildung 3. Aufgabe 2, VERA-3 Mathematik 2016

<sup>3</sup> siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 10-11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

## Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Ein weiterer Aspekt im Bereich *Muster und Strukturen* betrifft funktionale Beziehungen. Wird einer Zahl oder einer Größe nach einer festen Vorschrift eine zweite Zahl oder Größe zugeordnet, so ergeben sich Zahlenpaare, die oftmals ein Muster erkennen lassen. Ein funktionaler Zusammenhang, der in vielen Sachsituationen beim Modellieren auftritt, ist die Proportionalität. Weniger häufig zeigt sich indirekte Proportionalität, wie in der folgenden Aufgabe (Abbildung 4): Je mehr Elias an einem Tag strickt, desto schneller wird er fertig.

Elias strickt einen Schal. Er strickt jeden Tag ein gleich langes Stück.

Wenn er jeden Tag 16 cm strickt, ist der Schal in 10 Tagen fertig.

Wie viel müsste er jeden Tag stricken, damit er in 5 Tagen fertig wird?

\_\_\_\_\_ cm



Abbildung 4. Aufgabe 5, VERA-3 Mathematik 2016

### 3.2 Hinweise für den Unterricht

Muster und Strukturen sind als übergreifendes Prinzip das Fundament aller Inhaltsbereiche des Mathematikunterrichts und der Mathematik als Wissenschaft. Gegenstand des Mathematikunterrichts ist das Erkunden, das Entdecken, das Herstellen und das Nutzen von Mustern.

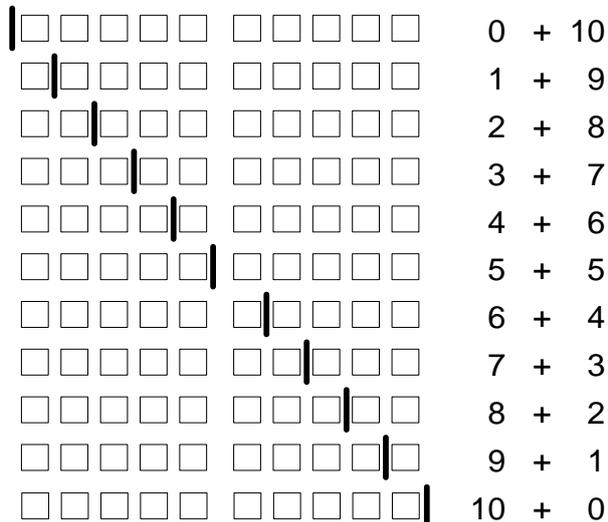
Das Denken in Mustern und Strukturen bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie. Je besser ein Kind Zahlen, Rechnungen, Formen, einzelne Wissensselemente und Fertigkeiten vernetzen kann, desto geringer wird sein Gedächtnis belastet.

Bei der Diskussion von Mustern und Strukturen werden insbesondere die allgemeinen mathematischen Kompetenzen *Darstellen*, *Argumentieren* und *Kommunizieren* gefordert und gefördert.

Im Folgenden werden Beispiele zu den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen dargelegt, an denen das übergreifende Prinzip von Mustern und Strukturen für den Mathematikunterricht verdeutlicht wird. Vor allem die enge Vernetzung zwischen Arithmetik und Geometrie wird daraus ersichtlich.

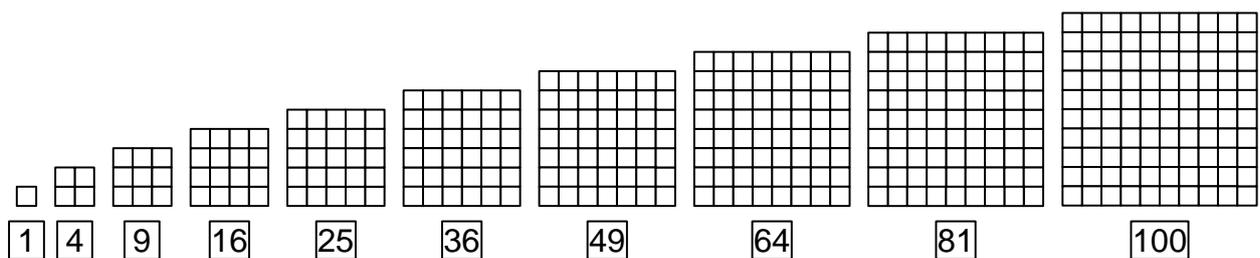
## Muster in der Arithmetik

Muster und Strukturen sind grundlegend für das Zahlverständnis (z. B. Stellenwertsystem, mathematische Strukturen in Arbeitsmitteln) und das Verständnis der Rechenoperationen (z. B. Entwicklung von Grundvorstellungen zu Multiplikationsaufgaben, Zahlzerlegungen).



## Muster in der Geometrie

Das Beispiel Quadratzahlen zeigt den Bezug zwischen einer geometrischen Folge und einer arithmetischen Zahlenfolge.



Vertiefend können folgende Fragestellungen bearbeitet werden: Wie viel muss man zur ersten Quadratzahl addieren, um zur zweiten zu kommen? Wie viel fehlt von der zweiten zur dritten? ... Was fällt dir auf? Wie heißt die Quadratzahl von 11, von 12, ...?

## Muster in der Kombinatorik

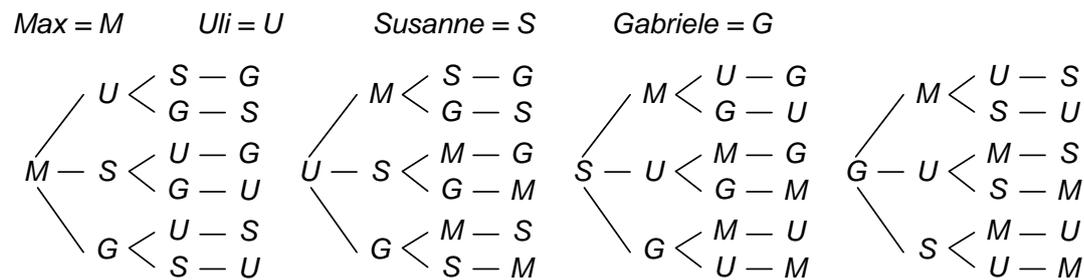
Muster und Strukturen in der Kombinatorik werden z. B. in Baumdiagrammen deutlich. Alle Möglichkeiten eines kombinatorischen Problems können so übersichtlich erfasst werden.

Beispiel:

Die Klasse 3a besucht eine Zirkusvorstellung. Max, Uli, Susanne und Gabriele sind enge Freunde und wollen nebeneinandersitzen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich nebeneinanderzusetzen?

Es gibt \_\_\_\_\_ Möglichkeiten.



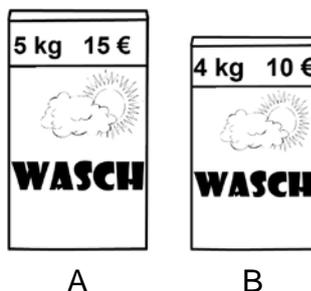
## Muster in der sachbezogenen Mathematik

Wenn zwischen Größen und/oder Zahlen ein Rechenmuster besteht, mit dem man eine Größe und/oder Zahl aus der anderen bestimmen kann, so spricht man davon, dass Größen bzw. Zahlen in einem „funktionalen Zusammenhang“ stehen.

Mögliche Beispiele:

1. Proportionaler Zusammenhang von zwei Größen

Welches Waschmittel ist günstiger?



A

Gewicht in kg	5	1
Preis in €	15	3

B

Gewicht in kg	4	2	1
Preis in €	10	5	2,50

## 2. Funktionaler Zusammenhang von zwei Zahlen:

Bestimmen der Kantenlänge und des Rauminhalts von Würfeln (durch Auszählen von Einheitswürfeln).

Kantenlänge	2	3	4		
Rauminhalt	8	27	64		

## 4. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Unterricht, der auf den Aufbau von Kompetenzen im Bereich *Muster und Strukturen* abzielt, sollte diese Leitidee in allen anderen Kompetenzbereichen mitdenken. Das Erkennen, Beschreiben und Weiterführen von Mustern sind grundlegende Tätigkeiten in der Mathematik: Muster zeigen sich in der Geometrie (Parkette, Bandornamente, Symmetrien) und in der Kombinatorik beim Strukturieren von Lösungsmöglichkeiten, aber vor allem auch bei strukturierten Päckchen, Aufgabenfolgen oder zahlreichen produktiven Übungsformen, wie Rechendreiecke, Rechenmauern, usw.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Hirt & Wälti (2008) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>4</sup>.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke, 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

---

<sup>4</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

## 5. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.5	
Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben .....	6
Abbildung 3. Aufgabe 2, VERA-3 Mathematik 2016 .....	7
Abbildung 4. Aufgabe 5, VERA-3 Mathematik 2016 .....	8

## 6. Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung.  
In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Helmke, A. (2006). Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Hannover: Friedrich Verlag.
- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <https://www.kmk.org/de/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>)
- Radatz, H. & Schipper, W. (Hrsg.) (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Band 2: 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich.  
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik.  
In: P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität.  
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.