

---

Vergleichsarbeiten VERA-3  
(3. Jahrgangsstufe)

# Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG (TEIL II)

---

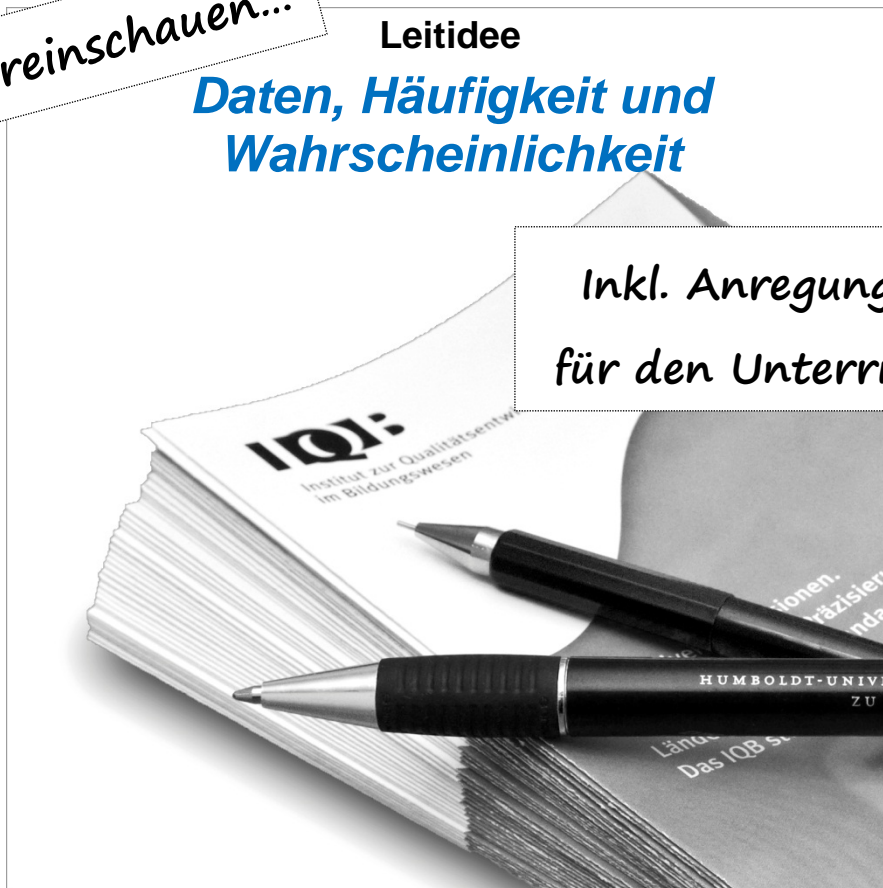
Fachdidaktische Orientierung  
zur

Leitidee

**Daten, Häufigkeit und  
Wahrscheinlichkeit**

*Einfach mal reinschauen...*

*Inkl. Anregungen  
für den Unterricht!*



Bereitgestellt zum VERA-Durchgang 2023

Dieses Dokument wurde leicht angepasst. (08/2023)

## Inhalt

1.	Einleitung.....	3
2.	Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards .....	3
2.1	Die Bildungsstandards Mathematik .....	3
2.2	Kompetenzstufen im Fach Mathematik.....	4
3.	<b>Die Leitidee <i>Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit</i></b> .....	7
3.1	Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein? .....	7
3.2	Daten erfassen und darstellen.....	7
3.3	Häufigkeiten .....	8
3.4	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen .....	9
4.	Weitere Anregungen für den Unterricht.....	10
5.	Abbildungsverzeichnis .....	12
6.	Literaturverzeichnis.....	12

Autor\*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

### Anpassung 08/2023:

Grundlage dieses Dokuments sind die

„Didaktischen Handreichungen Teil II: Fachdidaktische Orientierung *Zahlen und Operationen* und *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeiten*“ des VERA-Durchgangs 2023.

Zur einfacheren thematischen Bereitstellung nach Leitideen für die Website [schulentwicklung.nrw.de](http://schulentwicklung.nrw.de) wurde daraus je eine Handreichung für jede Leitidee erstellt. Einige Formatierungen wurden angepasst, inhaltliche Änderungen wurden nicht vorgenommen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien  
auch online finden können?



[www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben](http://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben)

# 1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt.

Ferner wird der mathematische Kompetenzbereich ***Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*** erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert.

Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die Domäne *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* kurz eingegangen.

Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

## 2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

### 2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler\*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler\*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,<sup>1</sup>
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,

---

<sup>1</sup> In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schüler\*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

## 2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schüler\*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler\*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell<sup>2</sup> erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schüler\*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

---

<sup>2</sup> Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

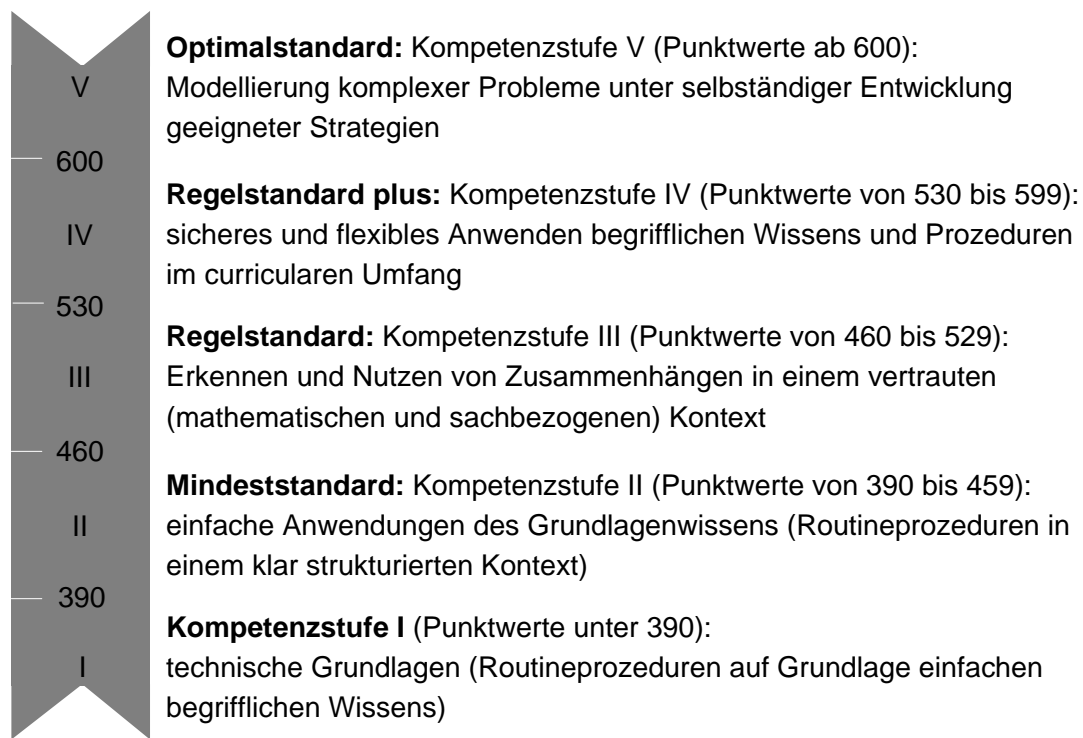


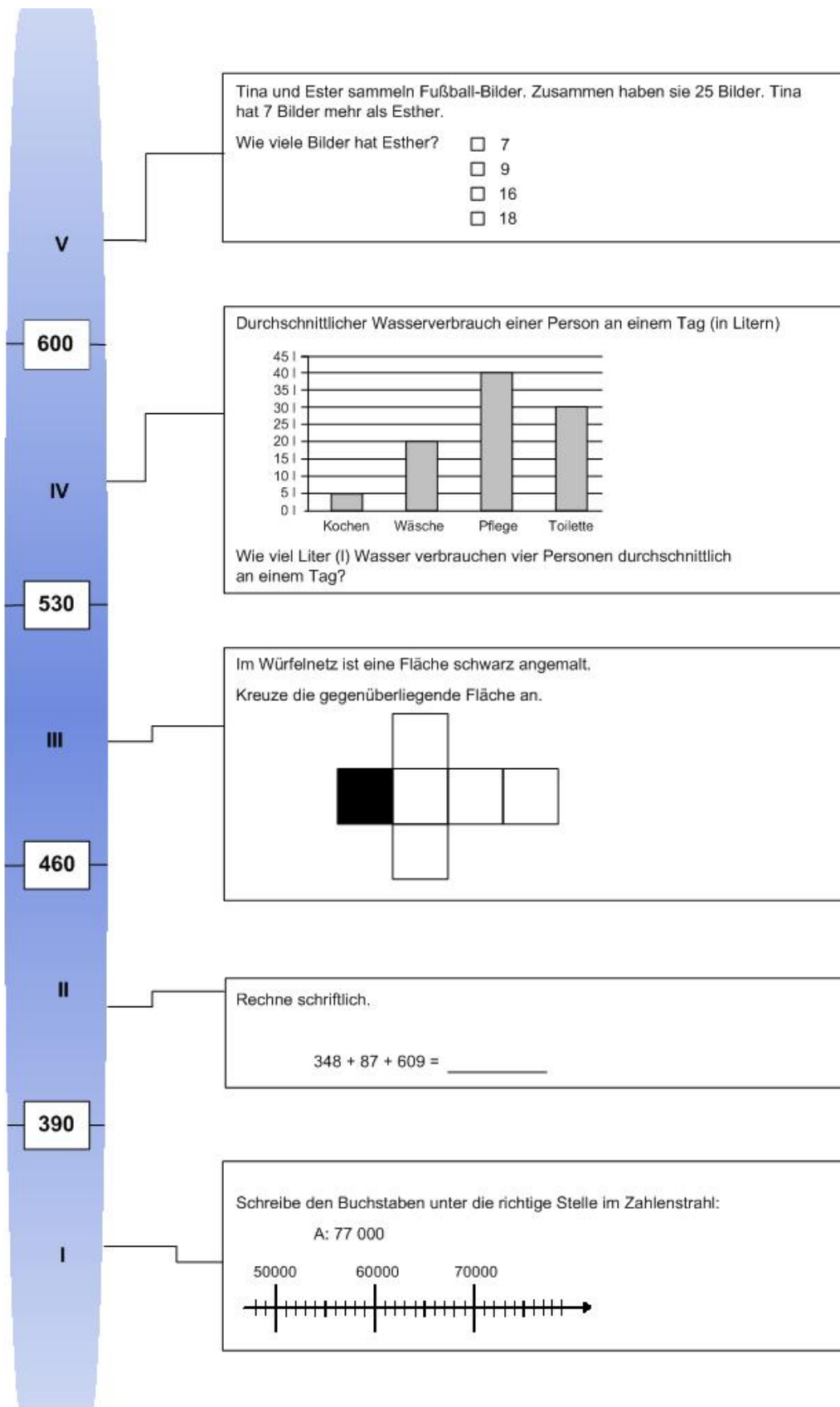
Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

**Mindeststandard.** Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler\*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler\*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

**Regelstandard.** Der *Regelstandard*, den die Schüler\*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler\*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler\*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben, siehe S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013, abrufbar unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>

### 3. Die Leitidee *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*

#### 3.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

Der Kompetenzbereich Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. In den Bildungsstandards umfasst die Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit drei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen: Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit. In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards werden davon die folgenden Kompetenzen explizit genannt:

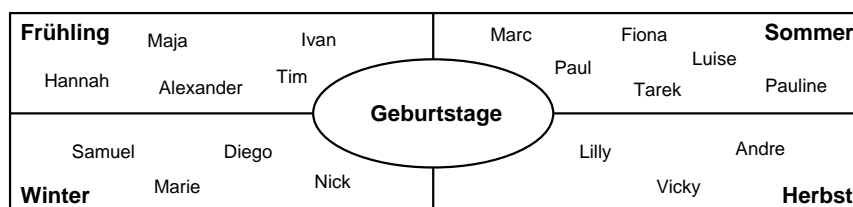
- Daten erfassen und darstellen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen<sup>3</sup>

Demgegenüber sind Kompetenzen im Bereich *Häufigkeiten* eher implizit vorhanden. Beim Entwerfen von Aufgaben müssen allerdings alle Aspekte in den Blick genommen werden. Daher werden an dieser Stelle die unterschiedlichen Herausforderungen für alle drei Bereiche anhand entsprechender Beispiele aus VERA-3 erläutert.

#### 3.2 Daten erfassen und darstellen

Wie die Aufgabe „Geburtstag“ (Abbildung 6) zeigt, umfasst der Bereich Daten zum einen das Darstellen von Daten in Schaubildern, Diagrammen und Tabellen.

Die Kinder haben eine Umfrage gemacht.



Zeichne die Ergebnisse für Frühling und Sommer in das Diagramm ein.

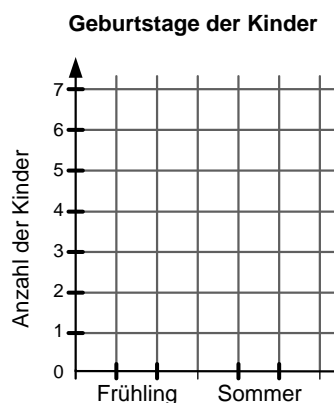


Abbildung 3. Aufgabe "Geburtstag", VERA-3 Mathematik 2019

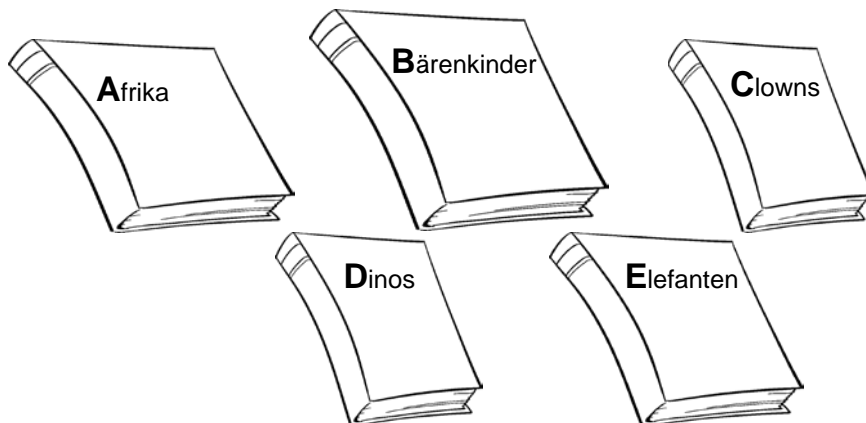
<sup>3</sup> siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

Dies kann vor allem im Unterricht besonders auf der Basis von Daten geschehen, die selbst gesammelt und strukturiert wurden. Zum anderen sollen aber auch gezielt Daten aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnommen werden. So ist es in der dargestellten Aufgabe erforderlich, der Abbildung die entsprechenden Anzahlen zu entnehmen, um diese im weiteren Verlauf in das Diagramm einzeichnen zu können.

Der Umgang mit Daten stellt einen wichtigen Aspekt für eine Propädeutik der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Außerdem ist er geeignet, verschiedene Repräsentationsebenen anzusprechen und damit auch den Ausbau der allgemeinen Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ zu stärken.

### 3.3 Häufigkeiten

Ein weiterer Aspekt im Hinblick auf den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ist das Betrachten von Möglichkeiten (etwa für das Ergebnis eines Zufallsexperiments). In der Überschrift der Leitidee wird dabei der Begriff „Häufigkeit“ gewählt. Nun ist dieser Begriff eng mit kombinatorischen Überlegungen verbunden. Gerade Aufgaben zur Kombinatorik, wie die Aufgabe „Bücher“ (Abbildung 7), ermöglichen ein systematisches Zählen oder strategisches Ermitteln der Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten und bereitet sinnvolles Argumentieren im Bereich Wahrscheinlichkeit vor. Um dies auch in der Schulpraxis besser zu verankern, werden Aufgaben zur Kombinatorik unter dieser Leitidee in die Vergleichsarbeiten integriert. Davon ist unbenommen, dass entsprechend der Systematik der Bildungsstandards Aufgaben dieses Typs ggf. auch dem Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ zugeordnet werden können.



Leo darf sich zwei Bücher ausleihen.

Schreibe alle Möglichkeiten auf. Nutze die Anfangsbuchstaben.

AB,  
\_\_\_\_\_

Abbildung 4: Aufgabe „Bücher“, VERA-3 Mathematik 2019



### 3.4 Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Den inhaltlichen Schwerpunkt *Wahrscheinlichkeit* im engeren Sinne umzusetzen gestaltet sich etwas schwieriger. So gibt es hier wenige Aufgabentypen, die bereits für die Grundschule geeignet sind. Es darf nicht vergessen werden, dass wichtige Grundlagen einer systematischen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie etwa die Bruchrechnung, in der Grundschule noch nicht behandelt sind. Es darf auch nicht vergessen werden, dass gerade in diesem Inhaltsbereich Intuition und mathematische Theorie nicht immer konform gehen. So wird etwa der Begriff „wahrscheinlich“ umgangssprachlich eher mit „guten Chancen“ verbunden, während der Begriff „unwahrscheinlich“ auf eher „schlechte Chancen“ hindeutet.

In der mathematischen Umsetzung ist nur der Begriff der „Wahrscheinlichkeit“ verankert, die durch einen Wert zwischen 0 und 1 ausgedrückt wird. Dabei bezeichnet „0“ ein unmögliches Ereignis und „1“ ein sicheres Ereignis. Bei einer Wahrscheinlichkeit von  $1/6$  tritt ein Ereignis auf lange Sicht in einem von sechs Fällen ein, so wie es etwa beim Würfeln einer „5“ der Fall ist. Bei einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  ist ungefähr die Hälfte der Fälle „günstig“, was beispielsweise für den Münzwurf oder das Würfeln einer geraden Zahl gilt. Nun aber jeweils klar zu sagen, ob ein bestimmter Wert zwischen 0 und 1 den umgangssprachlichen Begriffen „wahrscheinlich“ bzw. „unwahrscheinlich“ zuzuordnen ist, wäre wenig sinnvoll. Entsprechend sind daher Begriffe wie „wahrscheinlich“ oder „unwahrscheinlich“ für VERA nicht geeignet, könnten sie doch eher verwirrend als klärend sein – allenfalls in Vergleichen ist es sinnvoll, davon zu sprechen, dass ein Ereignis wahrscheinlicher ist als ein anderes oder weniger wahrscheinlich. Wie die Aufgabe „Zufallsexperimente“ (Abbildung 8) zeigt, bieten sich als Grundbegriffe „möglich, aber nicht sicher“, „sicher“ und „unmöglich“ an.

Kreuze an.

Eine 5 als Ergebnis ist ...


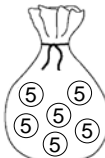

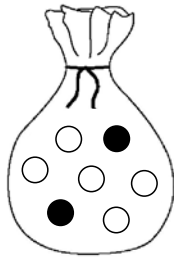
	sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung 5: Aufgabe „Zufallsexperimente“, VERA-3 Mathematik 2019

Neben der *Kenntnis der Grundbegriffe*, sollen die Schüler\*innen im Bereich der Wahrscheinlichkeit auch *Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen*. Die Aufgabe „Kugeln“ (Abbildung 9) zeigt, wie dies umgesetzt werden kann.



Kira sagt: „Es ist wahrscheinlicher eine weiße Kugel zu ziehen als eine schwarze Kugel.“

Hat Kira recht? Kreuze an.  ja  nein

Begründe.



Abbildung 6: Aufgabe „Kugeln“, VERA-3 Mathematik 2019

Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist es sicher sinnvoll, diese, wenn möglich, in einen kindgerechten Kontext einzubetten, welcher der Lebenswelt der Kinder entstammt. Hierzu zählen besonders Würfelspiele oder der Münzwurf.

#### 4. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schüler\*innen zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schüler\*innen angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen es viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler\*innen im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Hirt & Wälti (2008) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>4</sup>.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.), und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schüler\*innentätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schüler\*innenorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind.

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler\*innen gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schüler\*innen ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schüler\*innenlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

---

<sup>4</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

## 5. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.....	5
Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben,.....	6
Abbildung 3. Aufgabe "Geburtstag", VERA-3 Mathematik 2019.....	7
Abbildung 4: Aufgabe „Bücher“, VERA-3 Mathematik 2019.....	8
Abbildung 5: Aufgabe „Zufallsexperimente“, VERA-3 Mathematik 2019.....	9
Abbildung 6: Aufgabe „Kugeln“, VERA-3 Mathematik 2019.....	10

## 6. Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung.  
In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Hannover: Friedrich Verlag.
- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <https://www.kmk.org/de/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>)
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik - für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich.  
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik.  
In: P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität.  
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.