



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten VERA-3
(3. Jahrgangsstufe)

Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG (TEIL II)

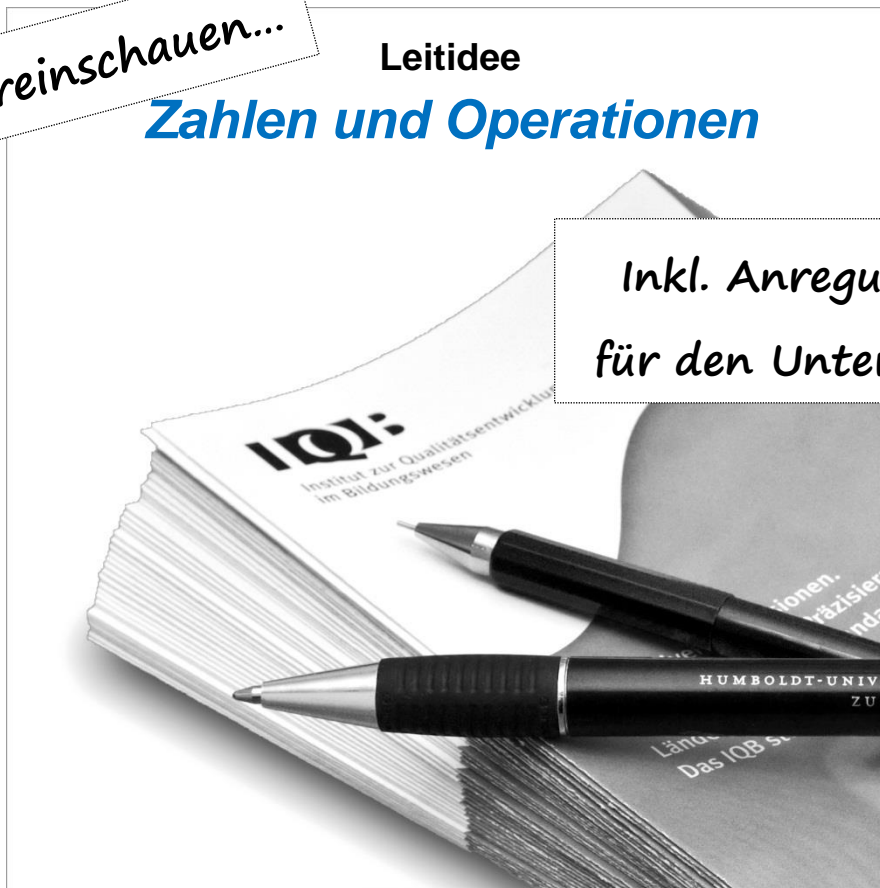
Fachdidaktische Orientierung
zur

Leitidee

Zahlen und Operationen

Einfach mal reinschauen...

*Inkl. Anregungen
für den Unterricht!*



Bereitgestellt zum VERA-Durchgang 2023

Dieses Dokument wurde leicht angepasst. (08/2023)

Inhalt

1.	Einleitung.....	3
2.	Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards	3
2.1	Die Bildungsstandards Mathematik.....	3
2.2	Kompetenzstufen im Fach Mathematik.....	4
3.	Die Leitidee <i>Zahlen und Operationen</i>	7
3.1	Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?	7
3.2	Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung	7
3.3	Rechenoperationen verstehen und beherrschen	7
3.4	Anwendung des Rechnens in Kontexten	8
3.5	Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen	9
4.	Weitere Anregungen für den Unterricht.....	10
5.	Abbildungsverzeichnis	12
6.	Literaturverzeichnis.....	12

Autor*innen der fachdidaktischen Orientierungen sind

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Prof. Dr. Kristina Reiss und Dr. Heino Reimers.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Anpassung 08/2023:

Grundlage dieses Dokuments sind die

„Didaktischen Handreichungen Teil II: Fachdidaktische Orientierung *Zahlen und Operationen* und *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeiten*“ des VERA-Durchgangs 2023.

Zur einfacheren thematischen Bereitstellung nach Leitideen für die website schulentwicklung.nrw.de wurde daraus je eine Handreichung für jede Leitidee erstellt.

Einige Formatierungen wurden angepasst, inhaltliche Änderungen wurden nicht vorgenommen, lediglich 2 Beispielaufgaben entfernt.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?



www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Einleitung

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt.

Ferner wird der mathematische Kompetenzbereiche **Zahlen und Operationen** erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert.

Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die Domäne *Zahlen und Operationen* kurz eingegangen.

Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren (Teil III) zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schüler*innen bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schüler*innen zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind damit auch Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,¹
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,

¹ In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ nicht enthalten. Im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik für den Primarbereich wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (Winkelmann & Robitzsch, 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

- Darstellen,
- Modellieren.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schüler*innen helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (Kultusministerkonferenz, 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Ausrichtung von Mathematikunterricht. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schüler*innen verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge hinsichtlich der allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schüler*innen – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell² erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2012; Reiss & Winkelmann, 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schüler*innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

² Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 verabschiedet und 2022 weiterentwickelt. Die bisher vorliegenden Kompetenzstufenmodelle, auf die sich das vorliegende didaktische Material bezieht, wurden auf Basis der Bildungsstandards von 2004 entwickelt. Mit der Normierung neu entwickelter Testaufgaben nach den Bildungsstandards von 2022 werden ab 2027 neue Kompetenzstufenmodelle vorliegen.

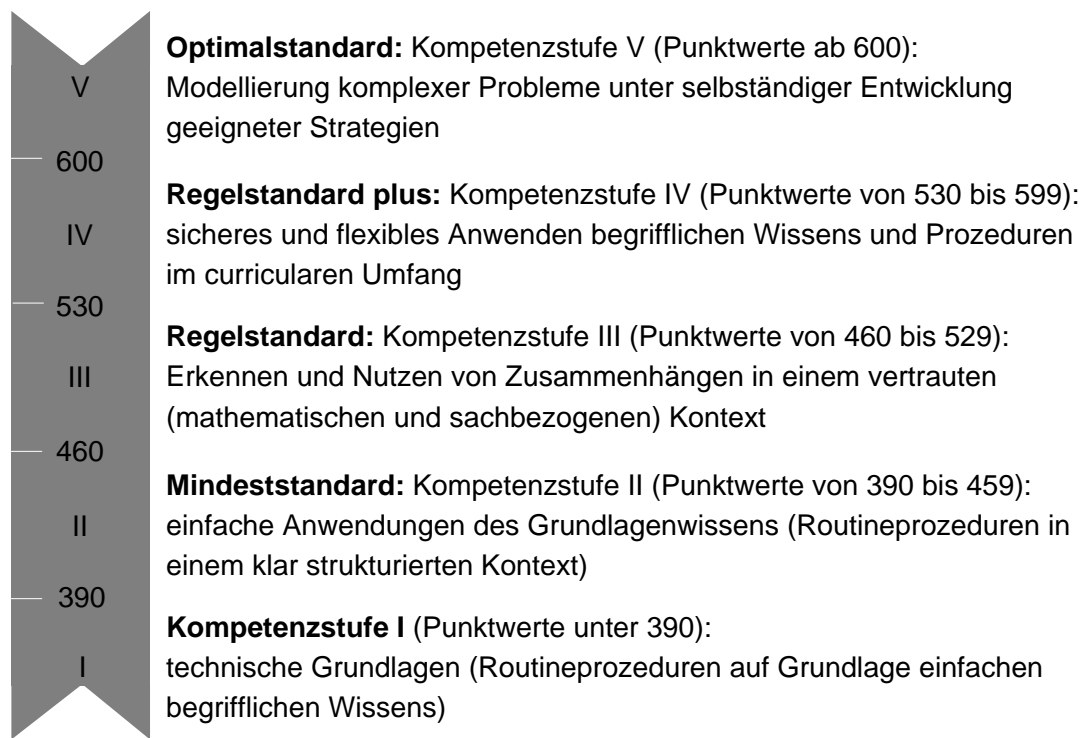


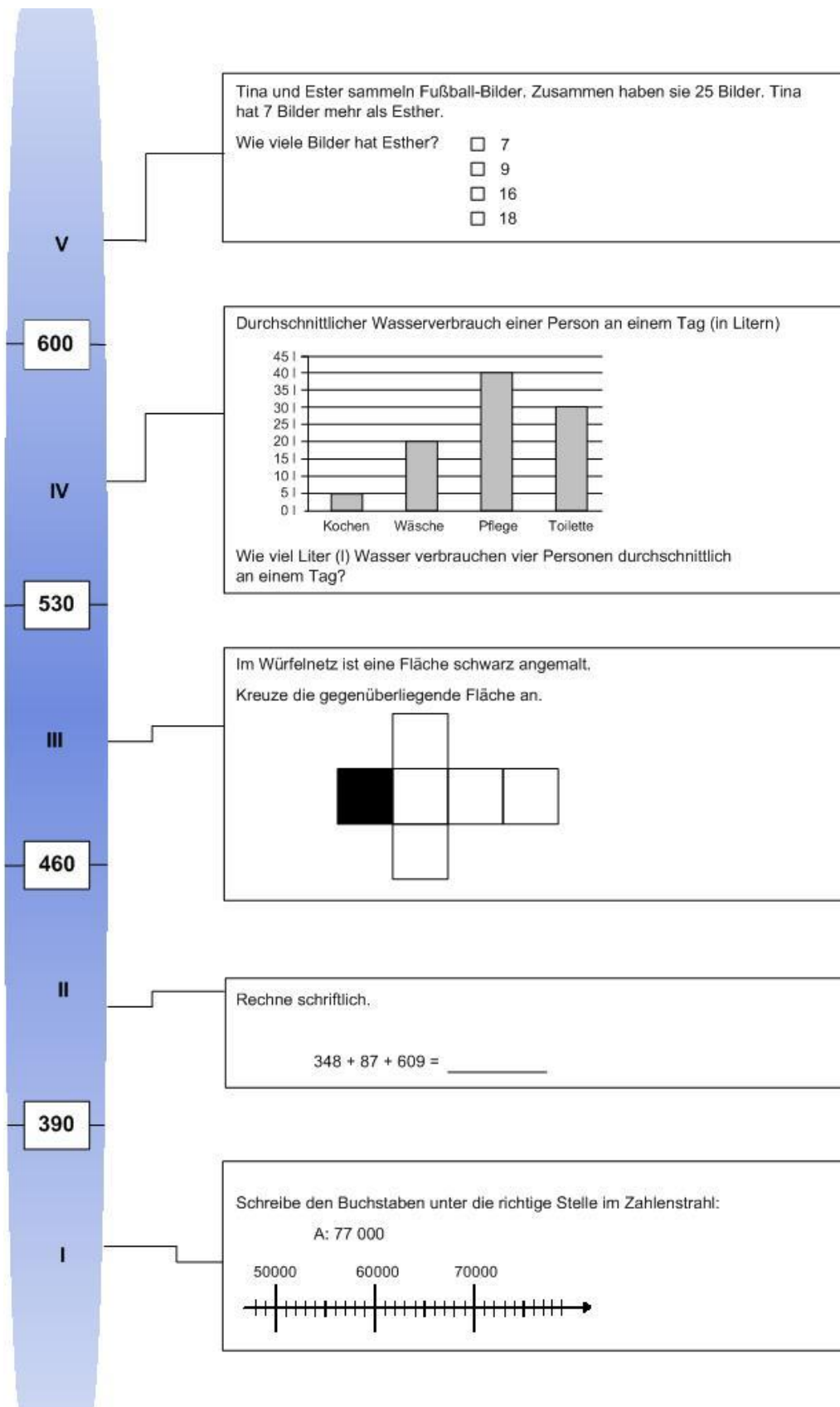
Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.

Mindeststandard. Für den Mindeststandard wurde das obere Ende von Kompetenzstufe I als Schwellenwert gewählt. Alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts stellen nur solche Anforderungen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schüler*innen des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss. Deshalb spricht man hier vom Mindeststandard des Bildungsgangs. Schüler*innen, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schüler*innen zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schüler*innen, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der Kultusministerkonferenz (KMK) festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch von sehr schwachen Schüler*innen gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben
s. S. 14 des Kompetenzstufenmodells in der Fassung vom 11.02.2013, abrufbar unter
<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>

3. Die Leitidee *Zahlen und Operationen*

3.1 Worum geht es in diesem Inhaltsbereich allgemein?

In der Alltagswelt begegnen Kinder schon früh Zahlen in verschiedenen Kontexten. Es ist Aufgabe des Mathematikunterrichts in der Primarstufe, diese Vorerfahrungen aufzugreifen, zu strukturieren und stetig weiterzuentwickeln. Daher spielt der Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* in der Grundschule eine zentrale Rolle. Er umfasst Kompetenzen zu folgenden Bereichen:

- Zahldarstellungen, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen, insbesondere auch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operationen zu verstehen
- Anwendung des Rechnens in Kontexten
- Überschlagendes Rechnen und kritisches Prüfen von Ergebnissen

3.2 Zahldarstellung, Orientierung im Zahlenraum, Zahlvorstellung

Dieser Kompetenzbereich bildet sowohl die Grundlage für die weiteren Bereiche der Kompetenz *Zahlen und Operationen* als auch für weitere Kompetenzbereiche der Bildungsstandards insgesamt. Es ist daher besonders wichtig, dass die Schüler*innen adäquate Vorstellungen zum dekadischen Stellenwertsystem aufbauen und ein Bewusstsein für Analogien im Aufbau von Zehnern, Hundertern usw. entwickeln. Für ein tragfähiges Verständnis dieses Stellenwertsystems müssen **Bündelung** und **Stellenwert** als die beiden zentralen Prinzipien erkannt werden (Padberg & Benz, 2011, S. 86). Dem Einsatz geeigneter Arbeitsmittel kommt dabei eine wichtige Bedeutung zu.

Die Kinder sollen verschiedene Darstellungsformen von Zahlen kennen und diese zueinander in Beziehung setzen. Zu dieser Kompetenz gehört auch die Orientierung im Zahlenraum (*Welche Zahl ist nahe bei 389? Welche von zwei Zahlen ist größer als die andere?*) sowie das Ordnen und Beschreiben von Zahlen (vgl. Abbildung 3).

Ordne die Zahlen nach der Größe. Beginne mit der kleinsten Zahl.

, , , ,

_____ < _____ < _____ < _____ < _____

Abbildung 3. Aufgabe „Zahlengröße“, VERA-3 Mathematik 2016

3.3 Rechenoperationen verstehen und beherrschen

Im Bereich *Zahlen und Operationen* ist ein wichtiger Aspekt, die einzelnen Rechenoperationen zu verstehen, deren Zusammenhänge zu begreifen und anwenden zu können. Dieser Bereich ist relativ komplex und umfasst neben dem Verständnis für die Grundrechenarten auch verschiedene Formen des Rechnens (z. B. Kopfrechnen, schriftliche Verfahren), verschiedene Herangehensweisen, wie mündliche und halbschriftliche Strategien, aber auch das Beherrschen von Grundaufgaben. Durch die Grundkenntnisse zum Aufbau des Stellenwertsystems und automatisierte Wissensbestandteile

wie das Einspluseins und Einmaleins können Strategien des Kopfrechnens auf analoge Aufgaben übertragen werden. Flexibles Rechnen ist insbesondere bei mündlichen und halbschriftlichen Verfahren von Vorteil, um Aufgaben effektiv lösen zu können. Um dem Anspruch gerecht zu werden, Aufgaben sicher und flexibel im Kopf oder halbschriftlich zu lösen, „ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung“ (Walther, van den Heuvel-Panhuizen, Granzer & Köller, 2012, S. 70).

Auch schriftlich dargestellte Algorithmen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation sollen entsprechend verstanden und ausgeführt werden. Neben dem Anwenden geeigneter Verfahren spielt auch das Analysieren und Sprechen über Zahleigenschaften eine Rolle, das hier wiederum auf einem soliden Grundverständnis der Operation aufbaut (s. dazu Abbildung 4).

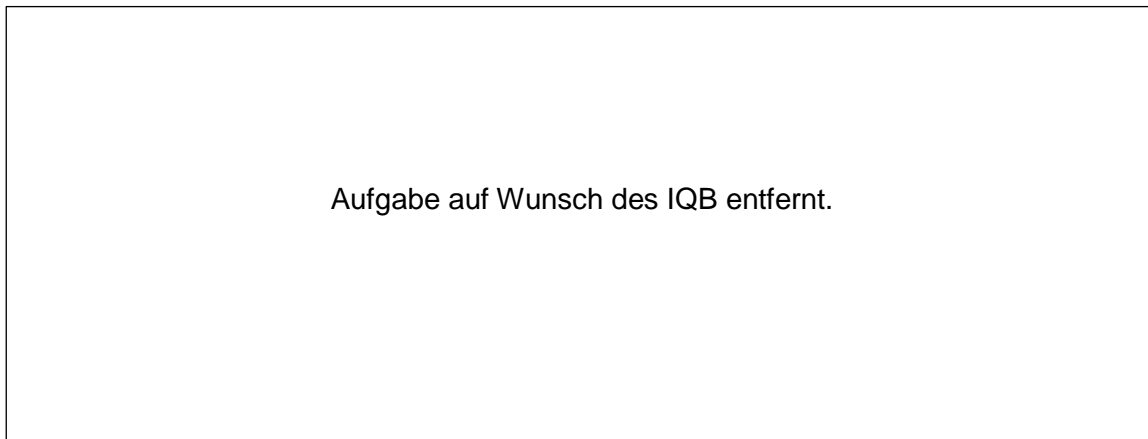


Abbildung 4.

3.4 Anwendung des Rechnens in Kontexten

Ob Kinder ein Verständnis der Rechenoperationen erworben haben, zeigt sich insbesondere darin, dass sie die verschiedenen Operationen sachgerecht in kontextbasierten Aufgabenstellungen anwenden können.

Entscheidend ist, dass die Schüler*innen eine Vorstellung zur dargelegten Sachsituation entwickeln, sie in den passenden mathematischen Kontext übersetzen (s. die Aufgabe in Abbildung 5), mit den ihnen bekannten mathematischen Mitteln (Rechenstrategien, -gesetze etc.) lösen, auf die Sachsituation rückbeziehen und auf Plausibilität überprüfen (s. 3.5).

Verbinde jeden Text mit einer passenden Aufgabe.

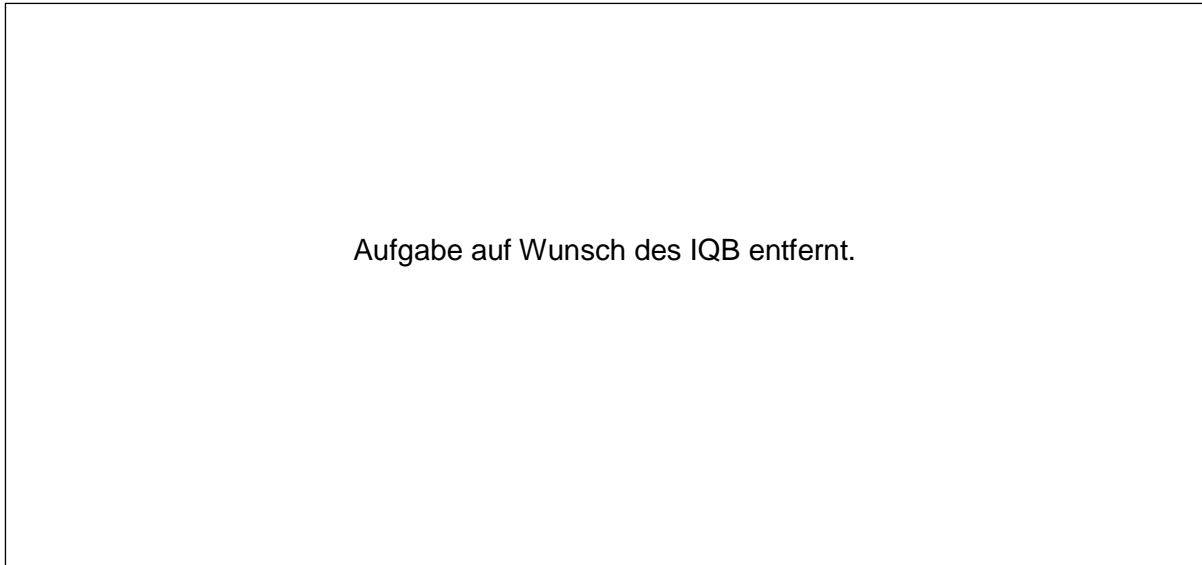


Abbildung 5.

3.5 Überschlagendes Rechnen und kritisches Überprüfen von Ergebnissen

Schriftliches Rechnen, aber auch das Rechnen mit digitalen Instrumenten kann dazu führen, dass die Ergebnisse nicht von einer Vorstellung der richtigen Größenordnung begleitet sind. Deshalb ist es umso wichtiger, mittels Überschlagsrechnungen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Generell sollte mit jeder Lösung einer Aufgabe (v. a. auch bei Sachaufgaben) die kritische Ergebnisüberprüfung auf Plausibilität (*Kann das stimmen?*) einhergehen.

4. Weitere Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schüler*innen zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schüler*innen angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen es viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler*innen im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Hirt & Wälti (2008) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die im Folgenden stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden³.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.), und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schüler*innentätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schüler*innenorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind.

³ Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schüler*innen gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schüler*innen ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schüler*innenlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

5. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule. IQB, 2013, S. 20.....	5
Abbildung 2. Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben.....	6
Abbildung 3. Aufgabe „Zahlengröße“, VERA-3 Mathematik 2016	7
Abbildung 4. Aufgabe „Kaugummis teilen“, VERA-3 Mathematik 2023	8
Abbildung 5. Aufgabe „24 Kinder verbinden“, VERA-3 Mathematik 2023.....	9

6. Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung.
In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Hannover: Friedrich Verlag.
- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in der Fassung vom 11.02.2013*. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <https://www.kmk.org/de/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>)
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik - für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich.
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Roppelt, A., Haag, N., Pant, H. A. & Köller, O. (2012). Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik.
In: P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S. 72-84). Münster: Waxmann.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität.
In: D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim: Beltz.