



Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes
Nordrhein-Westfalen



Muster- und Modellaufgaben zum Kernlehrplan Mathematik für das achtjährige Gymnasium (G8)

Nordrhein-Westfalen

<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/m-g8-musteraufgaben-070913.pdf>

September 2007

Vorbemerkung

Die folgenden Muster- und Modellaufgaben veranschaulichen und konkretisieren die in Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik für das achtjährige Gymnasium (G8) ausgeführten Kompetenzerwartungen für die verschiedenen Jahrgangsstufen. An den Aufgaben lassen sich Art, Höhe und Umfang der Kompetenzerwartungen ablesen.

Für den Mathematikunterricht stellen die Muster- und Modellaufgaben beispielhaft Probleme dar, die Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage der am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufe erworbenen Kompetenzen lösen können. Sie zeigen an komplexen und offenen Ausgangssituationen, wie Schülerinnen und Schüler über unterschiedliche prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen verfügen und diese kombinieren müssen, um in inner- und außermathematischen Situationen mathematikbezogene Fragen lösen, reflektieren und bewerten zu können.

Die Muster- und Modellaufgaben können auch im Unterricht eingesetzt werden, um im Laufe der jeweiligen Jahrgangsstufen Lerngelegenheiten zu bieten, anregende Fragen aufzuwerfen oder um neue Begriffe und Verfahren zu erarbeiten. Am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufe (oder später) können sie dazu dienen, festzustellen, ob und auf welchem Niveau Schülerinnen und Schüler die in Kapitel 3 genannten Kompetenzerwartungen erfüllen. Zu diesem Zweck decken die Aufgaben jeweils ein breites Spektrum über alle Kompetenzbereiche hinweg ab. Hinweise zum Einsatz und wesentliche Kompetenzen zur Bearbeitung der Aufgaben werden im Anschluss an die jeweiligen Aufgabenstellungen aufgeführt.

1. Aufgabenbeispiele für das Ende der Jahrgangsstufe 6

Aufgabe 1 – Würfelspiel

Ein Spiel mit einem Würfel hat folgende Regel:

Man darf so lange mit einem Würfel würfeln, bis eine Zahl zum zweiten Mal erscheint, also z. B. 1 – 3 – 4 – 3 – Stopp! Man darf sich dann so viele Punkte aufschreiben, wie man Würfe geschafft hat, in diesem Beispiel also vier Punkte. Führt das Spiel viele Male durch und notiert den Spielverlauf.



- Es liegt folgender Spielverlauf vor: 2 – 1 – 5. Bei welchen Zahlen wäre das Spiel mit dem nächsten Wurf beendet?
- Wie viele Punkte kannst du mindestens oder höchstens in einem Spiel erreichen?
- Wie viele verschiedene Spielverläufe gibt es, bei denen du drei Punkte bekommst?
- Du willst wissen, wie viele Punkte du im Durchschnitt in einem Spiel erhältst. Wie würdest du vorgehen?

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

Bei dieser Aufgabe geht es nicht um den Wahrscheinlichkeitsbegriff (obwohl grundlegende Einsichten vorbereitet werden), sondern um das Erheben von Daten, das systematische Zählen und das Argumentieren. Schülerinnen und Schüler müssen bei diesem Problem die Gelegenheit haben, das Spiel konkret durchzuführen und eine Reihe von Spielverläufen aufzuzeichnen. Der Übergang von einer Teilaufgabe zur nächsten wird – je nach Lerngruppe – nach unterschiedlicher Spieldauer erfolgen.

- Die Schülerinnen und Schüler sichern ihre Kenntnisse der Spielregeln.
- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln auf der Grundlage von Beispielen Einsichten in das Problem und argumentieren, um ihre Aussagen zu stützen.
- Die Schülerinnen und Schüler beginnen mit einer Sammlung von Spielverläufen und entwickeln dabei systematische Verfahren des Abzählens.
- Die Schülerinnen und Schüler nutzen bei diesem Problem die ersten grundlegenden Begriffe und Verfahren der beschreibenden Stochastik.

Variation der Aufgabenstellung

Vereinfachung der Aufgabe: Durch eine Änderung der Spielregeln kann die Aufgabenstellung vereinfacht werden: Das Spiel ist beendet, wenn die erste Zahl nochmals gewürfelt wird.

Fortführung der Aufgabe: Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, eigene weitere Spielregeln aufzustellen, teilen diese Spielregeln der Klasse mit, spielen nach den neuen Regeln und formulieren weitere Aufgaben.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

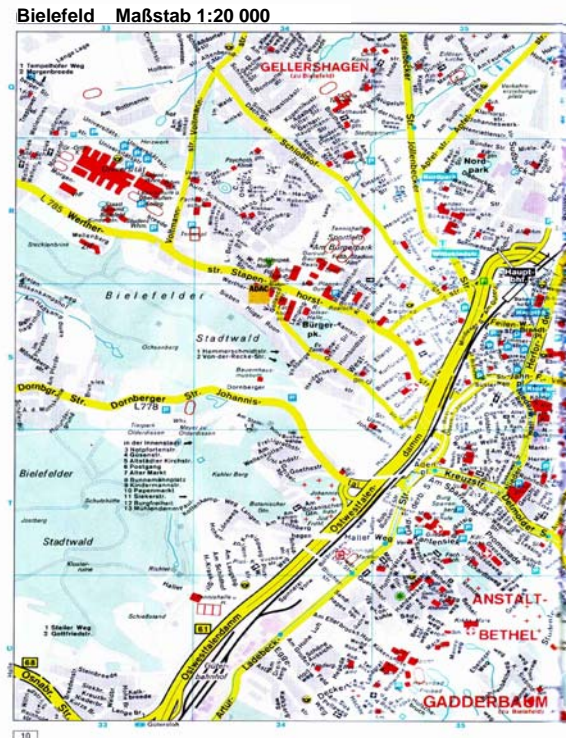
	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• nutzen intuitiv verschiedene Arten des Begründens (Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen, Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen)• präsentieren Ideen und Ergebnisse in kurzen Beiträgen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• wenden die Problemlösestrategien „Beispiele finden“, „Überprüfen durch Probieren“ an
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• bestimmen Anzahlen auf systematische Weise
Stochastik	<ul style="list-style-type: none">• erheben Daten und fassen sie in Ur- und Strichlisten zusammen• bestimmen relative Häufigkeiten, arithmetisches Mittel und Median

Aufgabe 2 – Entfernungen

Eine Schulklasse macht einen Ausflug mit dem Zug nach Bielefeld. Sie will den Tierpark Olderdissen besuchen.

- Bestimme anhand des Stadtplans von Bielefeld die Entfernung (Luftlinie) zwischen dem Hauptbahnhof (S 35) und dem Parkplatz am Tierpark Olderdissen (S 33).
- Franz kennt sich in Bielefeld nicht aus. Beschreibe einen einfach zu erklärenden Fußweg und bestimme dessen Länge.
- Sarah behauptet: „Ich kenne einen Weg, der nur 2,9 km lang ist.“ Trifft diese Aussage zu?

Hinweis: Die nebenstehende Grafik ist hier zu Dokumentationszwecken verkleinert dargestellt, der angegebene Maßstab ist in dieser Abbildung nicht korrekt. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem Plan ihres Schulorts. Die Angaben der Aufgabenstellungen sind entsprechend zu formulieren. *Quelle: ADAC Städteatlas NRW, 95/96*



Hinweise zum Einsatz der Aufgabe

- Die Schülerinnen und Schüler finden die Orte in der Karte und berechnen deren Abstand mithilfe der Maßstabsangabe.
- Die Schülerinnen und Schüler ermitteln in der Karte einen einfachen Weg und nutzen Verfahren zur Bestimmung der Weglänge, z. B. Messen und Addieren von Streckenlängen, Anlegen eines Fadens, Auslegen mit festen Maßlängen (Hölzchen etc.), Benutzen eines Zirkels.
- Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die Aussage, indem sie möglichst kurze Wege suchen, deren Länge ermitteln und vergleichen und die Wahl ihres Weges begründen.

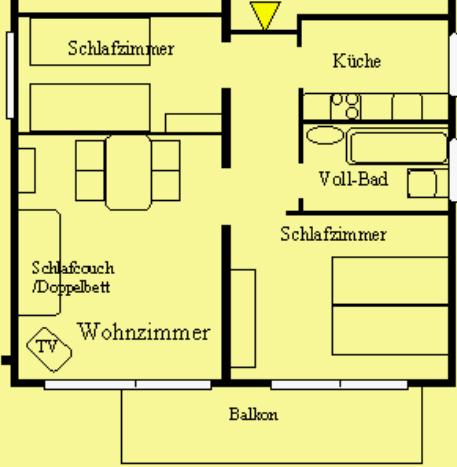
Die Teilaufgaben a) - c) haben steigendes Anspruchsniveau und können auch unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none"> • erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln und Verfahren mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen • sprechen über eigene und vorgegebene Lösungswege, Ergebnisse und Darstellungen, finden, erklären und korrigieren Fehler • präsentieren Ideen und Ergebnisse in kurzen Beiträgen • nutzen intuitiv verschiedene Arten des Begründens (Beschreiben von Beobachtungen, Plausibilitätsüberlegungen, Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen)
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen elementare mathematische Regeln und Verfahren (Messen, Rechnen, Schließen) zum Lösen von anschaulichen Alltagsproblemen • wenden die Problemlösestrategien „Beispiele finden“, „Überprüfen durch Probieren“ an • deuten Ergebnisse in Bezug auf die ursprüngliche Problemstellung
Modellieren	<ul style="list-style-type: none"> • übersetzen Situationen aus Sachaufgaben in mathematische Modelle (Terme, Figuren, Diagramme)
Werkzeuge	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen Lineal, Geodreieck und Zirkel zum Messen und genauem Zeichnen
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none"> • stellen Größen in Sachsituationen mit geeigneten Einheiten dar • ordnen und vergleichen Zahlen und runden natürliche Zahlen und Dezimalzahlen
Funktionen	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen gängige Maßstabsverhältnisse
Geometrie	<ul style="list-style-type: none"> • schätzen und bestimmen Längen, Winkel, Umfänge von Vielecken, Flächeninhalte von Rechtecken sowie Oberfläche und Volumina von Quadern

2. Aufgabenbeispiele für das Ende der Jahrgangsstufe 8

Aufgabe 1 – Aufteilung von Urlaubskosten



Appartement 3

70 qm bis 5 Personen (1.06)
unsere große Ferienwohnung mit Balkon

Appartement mit
großem Wohnzimmer und gemütlicher Sitzecke mit Federkern-Doppelbettcouch, Essplatz, Balkon, Kabel-TV, Stereoanlage mit CD, Küche kompl. eingerichtet (incl. Mikrowelle, Geschirrspüler usw.), **zwei sep. Schlafzimmer**, Vollbad, Zentralheizung, komfortable Ausstattung, Kinderbett und Hochstuhl a.A. kostenlos möglich; Gartenbenutzung, Fahrräder mögl.; Parkplatz am Haus

P

Preieliste	Vor/Nachsaison 16.Sep. bis 31.Mai	Hauptsaison 1.Juni bis 15.Sept.	Endreinigung entfällt bei Buchung über 14 Tg.
App. 1	55.00 €	75.00 €	36.00 €
App. 2	54.00 €	72.00 €	31.00 €
App. 3	55.00 €	75.00 €	36.00 €

Die Familien Meier und Müller haben im August 2006 ihren 14-tägigen Urlaub gemeinsam in einer Ferienwohnung an der Ostsee verbracht. Familie Meier besteht aus zwei Erwachsenen und einem Sohn, Familie Müller besteht aus dem alleinerziehenden Herrn Müller und seiner Tochter. Beide Kinder sind 10 Jahre alt. Für Verpflegung und gemeinsame Ausflugsfahrten im PKW der Familie Meier sind 960 € angefallen. Herr Meier schlägt vor, dass jede Familie die Hälfte der Gesamtkosten bezahlen soll. Herr Müller findet diesen Vorschlag nicht gerecht.

- a) Welche Argumente könnten Herr Meier und Herr Müller für ihre unterschiedlichen Standpunkte vorbringen?
- b) Welche Aufteilung könnte Herr Müller vorschlagen? Überlegt euch mindestens einen weiteren Vorschlag. Berechnet für jeden der Vorschläge die Kosten für jede Familie.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Aufgabe eignet sich insbesondere für Gruppenarbeit. Durch Ergänzungen in der Aufgabenformulierung kann die Form der Präsentation der Ergebnisse (u. a. ist ein Rollenspiel denkbar) variiert werden, so dass auch weitere Kompetenzen erfassbar sind. Diese auf einem realen Kontext basierende Aufgabe lässt vielfältige Lösungswege (Dreisatz, Brüche,...) zu. Je nach gewähltem Lösungsweg werden daher die folgenden Kompetenzen angesprochen.

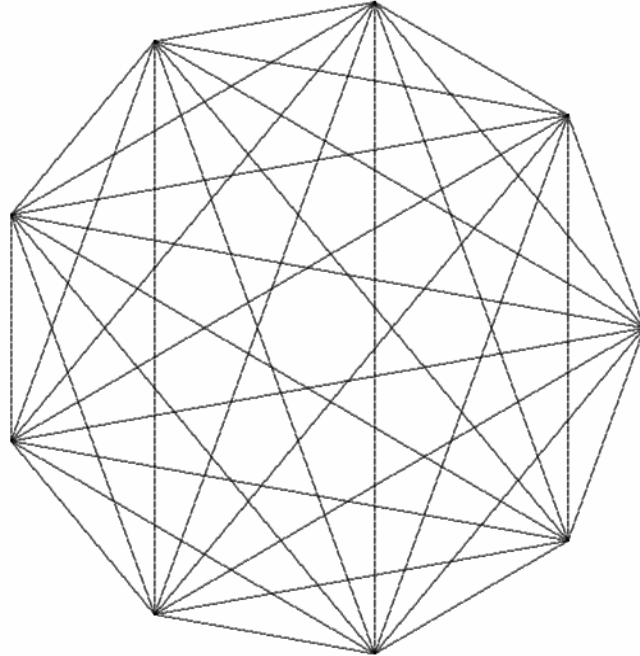
Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• ziehen Informationen aus mathemathhaltigen Darstellungen (Text, Bild, Tabelle, Graf), strukturieren und bewerten sie• arbeiten bei der Lösung von Problemen im Team• präsentieren Lösungswege in kurzen, vorbereiteten Beiträgen und Vorträgen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• geben inner- und außermathematische Problemstellungen in eigenen Worten wieder und entnehmen ihnen die relevanten Größen• überprüfen bei einem Problem die Möglichkeit mehrerer Lösungen oder Lösungswege
Modellieren	<ul style="list-style-type: none">• übersetzen einfache Realsituationen in mathematische Modelle (Zuordnungen, lineare Funktionen, Gleichungen, Gleichungssysteme, Zufallsversuche)
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• wenden ihre arithmetischen Kenntnisse von Zahlen und Größen an, nutzen Strategien für Rechenvorteile, Techniken des Überschlagens und die Probe als Rechenkontrolle
Funktionen	<ul style="list-style-type: none">• wenden die Eigenschaften von proportionalen, antiproportionalen und linearen Zuordnungen sowie einfache Dreisatzverfahren zur Lösung außer- und innermathematischer Problemstellungen an

Aufgabe 2 – Diagonalen im regelmäßigen Neuneck

Die Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte eines Vielecks wird Diagonale genannt.

Die folgende Figur zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit sämtlichen Diagonalen:



Lehrer Lämpel hat in seiner Klasse die Aufgabe gestellt, die Diagonalenanzahl zu bestimmen. Er hat pfiffige Schülerinnen und Schüler. Er findet in ihren Heften folgende Eintragungen:

Anna: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 - 9 = 27$

Birgit: $6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 27$

Hans: $6 \cdot 9 : 2 = 27$

Alle drei haben die Aufgabe richtig gelöst, aber leider keine Erläuterungen zu ihren Rechnungen angegeben.

Gib zu mindestens einer der von Anna, Birgit und Hans aufgeschriebenen Lösungen eine ausführliche Begründung an.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Das Verfahren des Anählens führt zur Frage, wie dieses Verfahren systematisiert werden kann und damit zu den von Anna, Birgit und Hans angegebenen Lösungen. Die verschiedenen Lösungsstrategien sollen von den Schülerinnen und Schülern nachvollzogen und begründet werden.

Die Schülerinnen und Schüler können aufgefordert werden, Aufgaben selbst zu finden, die mit ähnlicher Strategie gelöst werden können, z. B. wie viele Spiele werden in der Hinrunde der Fußball-Bundesliga ausgetragen?

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen• vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• überprüfen und bewerten Ergebnisse durch Plausibilitätsüberlegungen, Überschlagsrechnungen oder Skizzen
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• bestimmen Anzahlen auf systematische Weise

Aufgabe 3 – Auch Kopieren will gelernt sein

Jonas hat ein Rechteck der Länge 10 cm und der Breite 4 cm auf ein DIN-A4-Blatt gezeichnet. Anschließend fertigt er von diesem Blatt eine vergrößerte Kopie (Einstellung des Kopierers 125 %) an. Er misst die Länge und Breite nach – alles wie erwartet!



- a) Wie lang sind die Seitenlängen auf der vergrößerten Kopie? Berechne und überprüfe dein Ergebnis mithilfe eines Kopierers.

Kathrin macht Jonas ein Angebot: „Wenn du dein vergrößertes Rechteck mit dem Kopierer wieder auf die ursprüngliche Größe bringen kannst, lade ich dich zum Eis ein.“ Nach einigen vergeudeteten Kopien hat es Jonas noch nicht geschafft. Kann ihm die Mathematik weiterhelfen?

- b) Wie muss Jonas den Kopierer einstellen, um die Vergrößerung wieder in die Originalgröße (Länge 10 cm, Breite 4 cm) zu bekommen? Formuliere und begründe deine Vermutung zunächst.
- c) Überprüfe deine Vermutung durch eine Rechnung. Probiere an einem Kopierer aus, ob deine berechnete Prozentzahl für die Verkleinerung zum Erfolg führt.
- d) Was könnte der Grund dafür sein, dass Jonas die Verkleinerung nicht auf Anhieb gelang?

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Bei dieser Aufgabe geht es um eine Veränderung des Grundwertes. Den Schülerinnen und Schülern muss deutlich werden, dass eine Erhöhung um x Prozent nicht durch eine Verminderung um x Prozent ausgeglichen werden kann. Sie haben bei diesem Beispiel Gelegenheit, ihre Vermutungen und Berechnungen handelnd an einem Kopierer zu überprüfen.

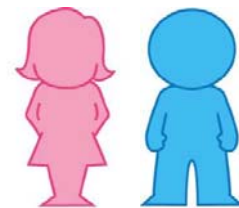
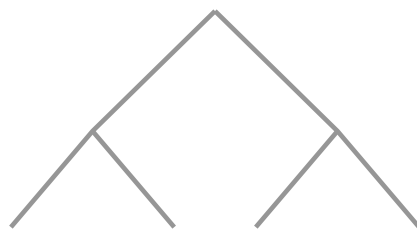
- e) Die Seitenlängen der Vergrößerung werden berechnet. Durch Anfertigen einer vergrößerten Kopie können die berechneten Werte empirisch überprüft werden. Die Vergrößerung des Rechtecks kann auf Folie der Klasse zur Verfügung gestellt oder von den Schülerinnen und Schülern selbst erstellt werden.
- f) Vermutungen und Begründungen sollten im Unterricht gesammelt werden. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln in dieser Unterrichtsphase Einsicht in das Problem und argumentieren intuitiv, um ihre Aussagen zu belegen.
- g) Als mögliche Hilfestellung und als Lösungsansatz für die Schülerinnen und Schüler bietet sich der Vergleich der Seitenlängen aus Original und Vergrößerung an. Durch Erstellen einer verkleinerten Kopie auf einem Kopierer sollte das berechnete Ergebnis empirisch überprüft werden.
- h) Die Schülerinnen und Schüler können darüber reflektieren, warum Jonas zunächst eine nicht maßstäbliche Verkleinerung erstellt hat, d. h. wie eine spontan gefundene Lösung aussehen könnte. Der Vergleich mit einer tragfähigen Lösung des Verkleinerungsproblems gibt Anlass über die Bedeutung des Grundwertes und seiner Veränderung bei dieser und auch bei anderen Aufgaben zu diskutieren.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen.• vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen• nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• untersuchen Muster und Beziehungen bei Zahlen und Figuren und stellen Vermutungen auf• nutzen verschiedene Darstellungsformen (Tabellen, Skizzen, Gleichungen) zur Problemlösung• überprüfen und bewerten Ergebnisse durch Plausibilitätsüberlegungen, Überschlagsrechnungen oder Skizzen
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• deuten Dezimalzahlen und Prozentzahlen als andere Darstellungsform für Brüche und stellen sie an der Zahlengerade dar, führen Umwandlungen zwischen Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl durch
Funktionen	<ul style="list-style-type: none">• berechnen Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert in Realsituationen (auch Zinsrechnung)

Aufgabe 4 – Geburten

Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen oder Mädchen ist annähernd 50 %. Wir betrachten nun ausschließlich Familien mit zwei Kindern.



- Stelle die verschiedenen Zusammensetzungen des Geschwisterpaares in einem Baumdiagramm dar und beschrifte die Äste des Baums.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind? Erläutere deinen Lösungsweg mithilfe des Wahrscheinlichkeitsbaums.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie kein Kind ein Mädchen ist? Erläutere deinen Lösungsweg mithilfe des Wahrscheinlichkeitsbaums.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder ein verschiedenes Geschlecht haben? Erläutere deinen Lösungsweg mithilfe des Wahrscheinlichkeitsbaums.
- Zähle die Wahrscheinlichkeiten von b), c) und d) zusammen. Erkläre das Ergebnis.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Wahrscheinlichkeiten werden mithilfe des Wahrscheinlichkeitsbaums und der Pfad- und Summenregel berechnet. Bei Aufgabenteil c) sind unterschiedliche Lösungsansätze möglich.

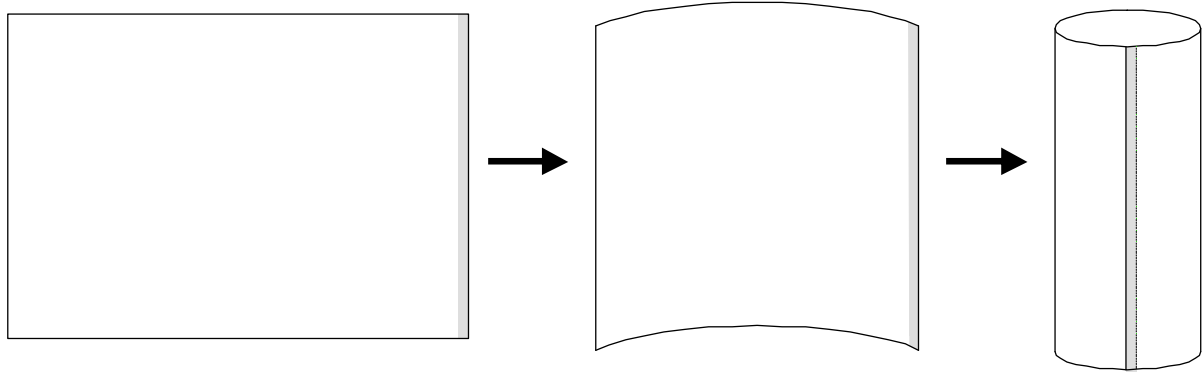
Mögliche Variation der Aufgabe:

- Übergang zu einer Dreikinderfamilie.
- Vergleich mit der realen Situation z. B. in der Klasse.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen
Modellieren	<ul style="list-style-type: none">• übersetzen einfache Realsituationen in mathematische Modelle (Zuordnungen, lineare Funktionen, Gleichungen, Gleichungssysteme, Zufallsversuche)
Stochastik	<ul style="list-style-type: none">• veranschaulichen ein- und zweistufige Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen• bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsexperimenten mithilfe der Pfadregeln

Aufgabe 5 – DIN A4-Blatt



Ein DIN A4-Blatt (21 cm breit und 29,7 cm lang) soll so an den kurzen Seiten zusammengeklebt werden, dass eine Rolle entsteht (siehe Skizze). Der Kleberand beträgt 7 mm.

- Berechne anhand dieser Angaben den Umfang der so entstandenen Papierrolle.
- Wie kann man bei einem Kreis mit bekanntem Umfang den Radius bestimmen? Erläutere mithilfe eines Beispiels.
- Der Radius des oben gezeigten Zylinders beträgt 4,62 cm. Hat der entstandene Zylinder ein Volumen von mehr als einem Liter?
- Handwerker benutzen zur Kreisumfangberechnung oft die folgende Faustformel:

„Kreisumfang gleich Durchmesser mal 3 plus 5 Prozent“

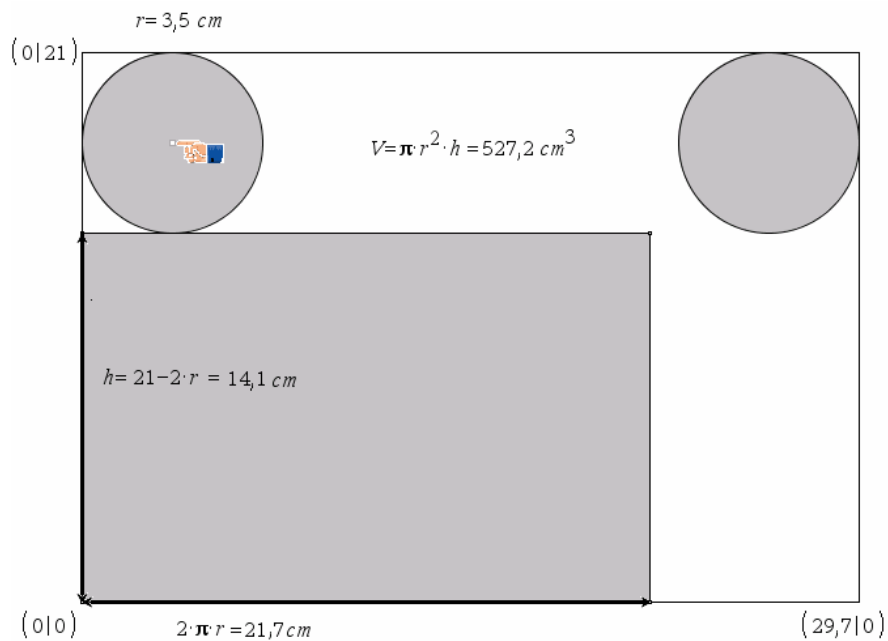
Berechne den Umfang der obigen Papierrolle ($r \approx 4,62$ cm) mithilfe der Faustformel. Welcher Näherungswert für π wird in der Faustformel verwendet?

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Aufgabe ist angelehnt an eine Beispielaufgabe zu den zentralen Prüfungen zum Ende der Sekundarstufe I 2007. Deswegen bietet sich ihr Einsatz vor allem zum Überprüfen von im Unterricht erworbenen Kompetenzen an. Aber auch im Unterricht kann die Aufgabe sinnvoll eingesetzt werden. Dabei bietet es sich an, die Aufgabenstellung zu variieren (z. B.: Wie muss man das Blatt kleben, um einen Zylinder mit einem Volumen von einem halben Liter zu erhalten?) und Schülerinnen und Schüler mit einem Blatt experimentieren zu lassen.

Durch den Einsatz von Werkzeugen können Schülerinnen und Schüler auch in die Lage versetzt werden, komplexere Probleme zu lösen oder Zusammenhänge zu veranschaulichen. Eine mögliche Fragestellung zum hier vorgestellten Kontext wäre: „Welches Volumen hat ein Zylinder mit Boden und Deckel unter der Voraussetzung, dass als Material nur ein DIN A4-Blatt verwendet werden soll, maximal?“

Das folgende Bild zeigt eine mögliche Bearbeitung (unter Vernachlässigung von Klebekanten) mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware.



Eine weitere mögliche Bearbeitung (ebenfalls unter Vernachlässigung von Klebekanten), die unter Verwendung einer Tabellenkalkulation erstellt wurde, zeigt untenstehende Abbildung.

Radius [cm]	Mögliche Breite Rechteck [cm]	Höhe Rechteck [cm]	Verwerbare Breite Rechteck / Umfang Deckel [cm]	Volumen der Dose [cm ³]	Idee:
0,5	28,7	21,0	3,14	16,493	
1,0	27,7	21,0	6,28	65,973	
1,5	26,7	21,0	9,42	148,440	
2,0	25,7	21,0	12,57	263,894	
2,5	24,7	21,0	15,71	412,334	
3,0	23,7	21,0	18,85	593,761	
3,5	22,7	21,0	21,99	808,175	
4,0	21,7	21,0	-	-	
4,5	20,7	21,0	-	-	
5,0	19,7	21,0	-	-	
5,5	18,7	21,0	-	-	

Solche Erkundungen bieten den Lernenden Gelegenheiten, ihr Verständnis von Zusammenhängen zwischen Größen wie Länge, Fläche und Volumen zu festigen und zu vertiefen. Darüber hinaus können solche Erkundungen genutzt werden, um selbst entwickelte Vermutungen zu testen.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen• ziehen Informationen aus mathemathikhaltigen Darstellungen (Text, Bild, Tabelle, Graf), strukturieren und bewerten sie
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• nutzen elementare mathematische Regeln und Verfahren (Messen, Rechnen, Schließen) zum Lösen von anschaulichen Alltagsproblemen
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• lösen lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen sowohl durch Probieren als auch algebraisch und grafisch und nutzen die Probe als Rechenkontrolle
Funktionen	<ul style="list-style-type: none">• berechnen Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert in Realsituationen (auch Zinsrechnung)
Geometrie	<ul style="list-style-type: none">• schätzen und bestimmen Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und zusammengesetzten Figuren, sowie Oberflächen und Volumina von Prismen und Zylindern

Aufgabe 6 – Irrationale Zahlen

Eine Mathematikstudentin hat sich eine außergewöhnliche Zahl ausgedacht. Sie lautet

0,123456789112233445566778899111222333444555666777888.....

„Und danach geht es immer so weiter...“, erklärt die Studentin. Ein Mitstudent behauptet: „Diese Zahl sieht so einfach und regelmäßig aus, die könnte man wahrscheinlich auch als Bruch schreiben. Die Studentin bezweifelt dies und fordert: „Dann sag mir doch den Bruch!“

- Gib einen Bruch an, der von der obigen Zahl höchstens eine Abweichung von 0,01 hat.
- „Die obige Zahl ist kein Bruch.“ Begründe diese Aussage.
- Gib drei weitere Zahlen an, die nicht als Bruch geschrieben werden können.

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Kompetenz irrationale von rationalen Zahlen unterscheiden zu können, steht im Fokus dieser Aufgabe.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

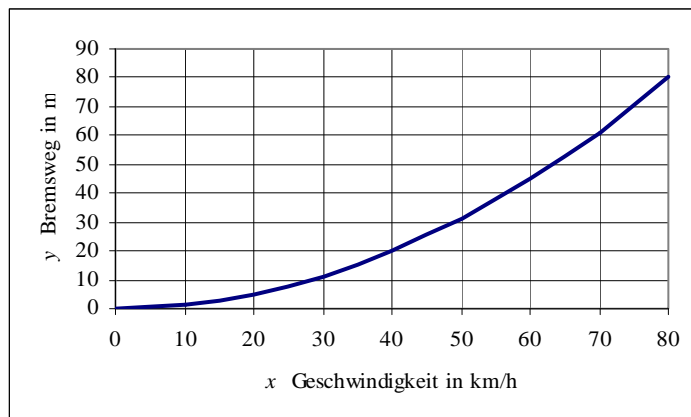
	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">erläutern die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffennutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">planen und beschreiben ihre Vorgehensweise zur Lösung eines Problemswenden die Problemlösestrategien „Zurückführen auf Bekanntes“ (Konstruktion von Hilfslinien, Zwischenrechnungen), „Spezialfälle finden“ und „Verallgemeinern“ an
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">ordnen und vergleichen rationale Zahlenunterscheiden rationale und irrationale Zahlen

3. Aufgabenbeispiele für das Ende der Jahrgangsstufe 9

Aufgabe 1 – Bremsweg

Die Länge y des Bremswegs eines Autos kann näherungsweise der Gleichung $y = a \cdot x^2$ berechnet werden. Dabei gibt x die Geschwindigkeit des Autos an. Der „Bremsfaktor“ a hängt vom Straßenzustand ab.

Im Diagramm wird für eine nasse Straße die Länge des Bremswegs in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.



- Erkläre, wie man mithilfe des Grafen den Faktor a bestimmen kann.
- Der Faktor a beträgt für eine nasse Straße $0,0125$. Berechne die Länge des Bremsweges für eine Geschwindigkeit von 95 km/h auf nasser Straße.
- Der Faktor a hat für eine trockene Straße einen anderen Wert als für eine nasse Straße. Skizziere einen möglichen Grafen für eine trockene Straße und begründe deine Wahl. Was sind in diesem Fall mögliche Werte für a ?
- Beschreibe, wie sich der Bremsweg verändert, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt.
- Welche Geschwindigkeit hatte ein Auto, das auf einer nassen Straße ($a = 0,0125$) einen 200 m [300 m, 400 m] langen Bremsweg hat?

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Aufgabe ist angelehnt an eine Beispielaufgabe zu den zentralen Prüfungen zum Ende der Sekundarstufe I 2007. Deswegen bietet sich ihr Einsatz vor allem zum Überprüfen von im Unterricht erworbenen Kompetenzen an. Aber auch im Unterricht kann die Aufgabe sinnvoll eingesetzt werden. Dabei liegt es nahe, die Aufgabenstellung zu erweitern (z. B.: Recherchiert im Internet, welchen Bremsweg ein PKW hat und passt das Modell für diesen PKW an.), um Schülerinnen und Schüler Gelegenheit zu geben, das gegebene Modell auf reale Situationen zu beziehen.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• erläutern mathematische Zusammenhänge und Einsichten mit eigenen Worten und präzisieren sie mit geeigneten Fachbegriffen
Modellieren	<ul style="list-style-type: none">• überprüfen die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation und verändern ggf. das Modell
Arithmetik/ Algebra	<ul style="list-style-type: none">• lösen einfache quadratische Gleichungen• verwenden ihre Kenntnisse über quadratische Gleichungen zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme
Funktionen	<ul style="list-style-type: none">• stellen lineare und quadratische Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, Grafen und in Termen dar, wechseln zwischen diesen Darstellungen und benennen ihre Vor- und Nachteile• deuten die Parameter der Termdarstellungen von linearen und quadratischen Funktionen in der grafischen Darstellung und nutzen dies in Anwendungssituationen• wenden lineare und quadratische Funktionen zur Lösung außer- und innermathematischer Problemstellungen an

Aufgabe 2 – Heißluftballon

Wie viel Liter Luft sind (ungefähr)
in diesem Heißluftballon?



Samstag und Sonntag startet auf dem Osterfeld mehrmals dieser stattliche Heißluftballon aus der niederländischen Partnerstadt Oldenzaal. Interessierte erfahren die Startzeiten am Stand auf dem Marktplatz.

extra Wochenblatt, 18. 3. 1999

Quelle: Wilfried Herget „Ein Bild sagt
mehr als tausend Worte“,
<http://blk.mat.uni-bayreuth.de/>

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Diese Aufgabe ist gänzlich offen, ohne Vorgaben an die Vorgehensweise der Schülerinnen und Schüler, gestellt. Ziel ist die Bestimmung eines groben Näherungswertes für das Volumen des Ballons und der Entwicklung geeigneter Methoden hierfür. Dies kann z. B. erfolgen über:

- die Annäherung des Ballonkörpers durch eine Kugel,
- die Annäherung des Ballonkörpers durch einen Würfel oder
- die Zerlegung des Ballonkörpers in eine Halbkugel und einen Kegel; „maßstäbliche Abschätzungen und Berechnung“ von Radius und Höhe

und anschließender Bewertung der „Genauigkeit“ des Ergebnisses.

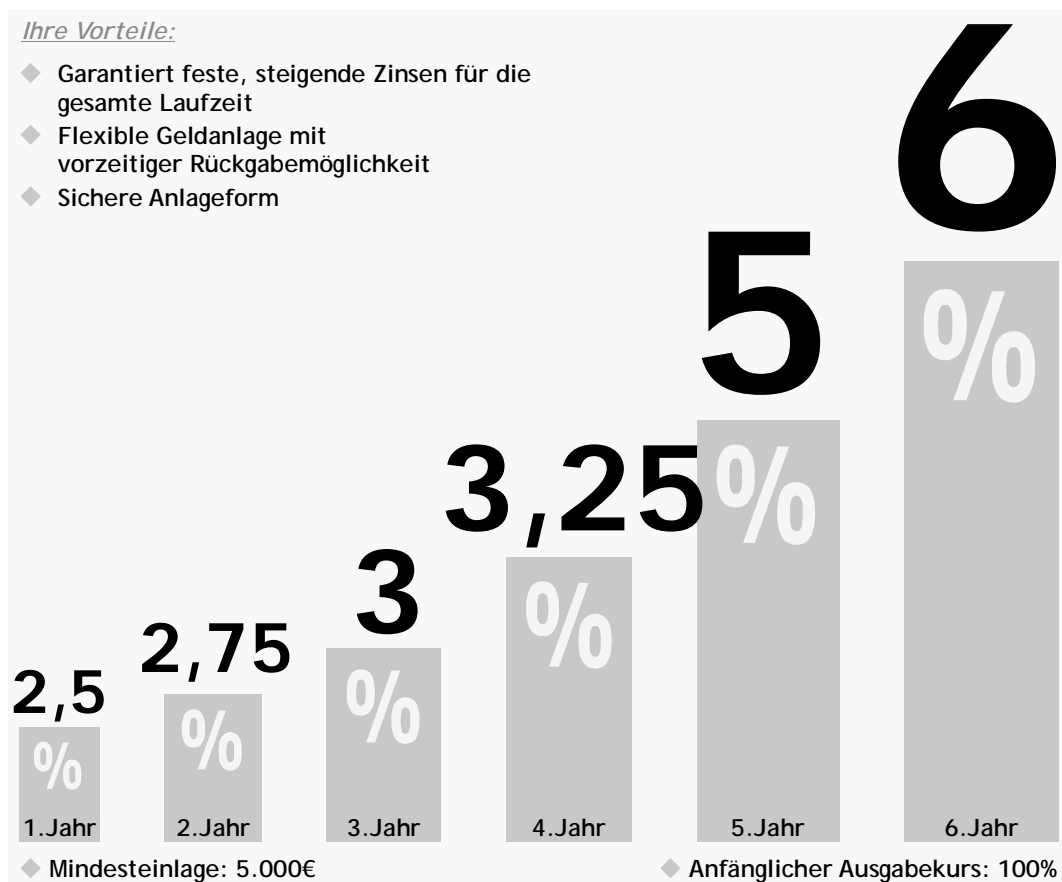
Um einen Maßstab zu gewinnen, kann die geschätzte Körpergröße einer abgebildeten Person herangezogen werden.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• ziehen Informationen aus einfachen authentischen Texten (z. B. Zeitungsberichten) und mathematischen Darstellungen, analysieren und beurteilen die Aussagen
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none">• zerlegen Probleme in Teilprobleme• vergleichen Lösungswege und Problemlösestrategien und bewerten sie
Modellieren	<ul style="list-style-type: none">• übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle (Tabellen, Grafen, Terme)
Geometrie	<ul style="list-style-type: none">• schätzen und bestimmen Längen, Winkel, Umfänge von Vielecken sowie Oberflächen und Volumina von Quadern• schätzen und bestimmen Oberflächen und Volumina von Pyramiden, Kegeln und Kugeln

Aufgabe 3 – Sparplan

Eine Bank hat die folgende Anzeige veröffentlicht.



Sabrina eröffnet bei dieser Bank ein Konto und zahlt 5 000 € ein.

- Berechne Sabrinas Zinsen nach einem Jahr.
- Wie viel Geld ist nach 2 Jahren auf Sabrinas Konto?
- Welchen gleich bleibenden Zinssatz müsste eine Bank anbieten, damit Sabrina nach Ablauf von 6 Jahren den gleichen Kapitalzuwachs hat?
- Erläutere, woran man erkennen kann, dass die Zinssätze in der Grafik nicht angemessen dargestellt sind.

70 % der Sparkunden sind mindestens 35 Jahre alt. Von diesen Sparkunden legen 40 % weniger als 10 000 € an. Von den Sparkunden, die jünger als 35 Jahre sind, legen 80 % weniger als 10 000 € an.

- Welcher Anteil der Sparkunden legt weniger als 10 000 € an? Erläutere mithilfe eines geeigneten Baumdiagramms.
- Welcher Anteil der Sparkunden, die 10 000 € oder mehr anlegen, ist jünger als 35 Jahre?

Hinweise zum Einsatz der Aufgabe:

Die Aufgabe ist angelehnt an eine Beispielaufgabe zu den zentralen Prüfungen zum Ende der Sekundarstufe I 2007. Deswegen bietet sich ihr Einsatz vor allem zum Überprüfen von im Unterricht erworbenen Kompetenzen an. Aber auch im Unterricht kann die Aufgabe sinnvoll eingesetzt werden. Dazu sollte die Aufgabenstellung variiert werden, da die Einbindung aktueller bzw. lokaler Angebote sehr nahe liegt und in der Regel gewinnbringend ist.

Hier ein Vorschlag:

Besorgt euch aktuelle Sparangebote von Banken sowie Sparkassen und entwerft eine Werbeanzeige, die ein von euch ausgewähltes Angebot möglichst positiv erscheinen lässt.

Geht dann wie folgt vor:

- Notiert eure Überlegungen vor dem Erstellen der Anzeige in Einzelarbeit.
- Tauscht die Ideen anschließend mit eurem Tischnachbarn aus.
- Zum Schluss einigt ihr euch in Gruppen von bis zu vier Schülerinnen und Schülern auf eine Idee und erstellt die Anzeige arbeitsteilig.

Beachtet: Erstellt eure Werbeanzeigen auf Plakaten, um sie anschließend den anderen Gruppen vorzustellen.

Wesentliche Kompetenzen (aus Kapitel 3)

	Schülerinnen und Schüler
Argumentieren/ Kommunizieren	<ul style="list-style-type: none">• ziehen Informationen aus mathemathhaltigen Darstellungen (Text, Bild, Tabelle, Graf), strukturieren und bewerten sie
Modellieren	<ul style="list-style-type: none">• übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle (Tabellen, Grafen, Terme)
Funktionen	<ul style="list-style-type: none">• berechnen Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert in Realsituationen (auch Zinsrechnung)• wenden exponentielle Funktionen zur Lösung außermathematischer Problemstellungen aus dem Bereich Zinseszins an
Stochastik	<ul style="list-style-type: none">• veranschaulichen ein- und zweistufige Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen• bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsexperimenten mithilfe der Pfadregeln• analysieren grafische statistische Darstellungen kritisch und erkennen Manipulationen