

Ministerium für Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein - Westfalen

Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

**Raum und Form –
Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“**



Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes
Nordrhein-Westfalen

I. Übersicht: Mathematik

Bereich: Raum und Form

Lernaufgabe: Forscherauftrag „Finde alle zwölf Fünflinge“

Bereich des Faches: Raum und Form

Leitidee:

Die Schülerinnen und Schüler ... sammeln durch handelnden Umgang Grunderfahrungen zu Eigenschaften ... von ebenen Figuren ..., zu den Auswirkungen geometrischer Operationen ...

Kompetenzerwartung

Kompetenzerwartung

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung. (lösen) (**Problemlösen/keativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an. (vermuten) (**Argumentieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher (...). (Raumorientierung und Raumvorstellung) (**Raum und Form**)
- stellen ebene Figuren her durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen (...), Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden, Spannen auf dem Geobrett. (Ebene Figuren) (**Raum und Form**)

Inhalt:

Pentominos

Anforderungsbereiche: Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

Lernaufgabe/Lernarrangement:

Forscherauftrag „Finde alle 12 Fünflinge.“

Vertiefung des Wissens:

Forscherauftrag: „Aus welchen Fünflingen kann du eine offene Schachtel basteln?“

Forscherauftrag: „Aus welchen der 35 Hexominos kannst du einen Würfel basteln?“

Überprüfung der Kompetenzen:

Intern: Beobachtung der Vorgehensweise beim Finden von Pentominos, mündliche Erläuterungen (Gruppengespräch), schriftliche Erläuterungen (Forschertagebuch)

Extern: Vergleichsarbeiten

Forscherauftrag

Pentominos

Verknüpfung zu anderen Fächern:

Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen
Mathekonzferenz

Sozialform:

Einzelarbeit
Gruppengespräch

Material:

Blatt mit Arbeitsauftrag
Gitterpapier (Kästchengröße: 2,5 cm x 2,5 cm)
Dose mit 5 Einheitsquadraten, 1 Zwilling, 2 Drillingen und 5 Vierlingen
Forschertagebuch (bzw. Blätter)

Bezüge zur Lebenswirklichkeit:

Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Eigenschaften von Quadraten, kennen die Bauregel für Polyominos, kennen alle Polyominos, die sich aus 2, 3 und 4 kongruenten Quadraten legen lassen, kennen den Begriff „deckungsgleich“, wissen, wie ebene Figuren auf Kongruenz überprüft werden können.

Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

finden alle 12 Lösungen, indem sie Pentominos probierend legen, auf Kongruenz überprüfen und noch fehlende unter Anleitung herstellen (AB I).

nutzen die Möglichkeit, durch systematisches Variieren Pentominos zu finden, und ergänzen noch fehlende unter Anleitung (AB II).

finden durch konsequent systematisches Variieren alle Pentominos und stellen ihre Systematik strukturiert dar (AB III).

Übergreifende Kompetenzen:

Analysieren und Reflektieren: Die Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen. Zur erfolgreichen Bearbeitung werden Vorwissen, Vermutungen und Vergleiche ebenso herangezogen wie fachbezogene und fächerübergreifende Zugänge und Verfahren.

Strukturieren und Darstellen: Die Schülerinnen und Schüler sind fähig, aus der Auseinandersetzung mit einem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse zu formulieren und diese angemessen festzuhalten.

Arbeits- und Sozialverhalten:

Selbstständigkeit: Die Schülerinnen und Schüler setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein.

Leistungsbereitschaft: Die Schülerinnen und Schüler erkennen Schwierigkeiten, fragen nach, holen sich Unterstützung ohne frühzeitig aufzugeben.

II. Aufgabenbeispiel

Mathematik

Bereich: Raum und Form
Schwerpunkt: Ebene Figuren
Vorhaben: Pentominos

Klasse: 3

Titel der Lernaufgabe: Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“

Kompetenzen

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Eigenschaften von Quadraten
- kennen die Bauregel für Polyominos
- kennen alle möglichen Polyominos, die sich aus 2, 3 und 4 kongruenten Quadraten legen lassen
- kennen den Begriff „deckungsgleich“
- wissen, wie ebene Figuren auf Kongruenz überprüft werden können

Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen). (**Problemlösen/kreativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten). (**Argumentieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher (...). (Raumorientierung und Raumvorstellung) (**Raum und Form**)
- stellen ebene Figuren her durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen (...), Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden, Spannen auf dem Geobrett. (Ebene Figuren) (**Raum und Form**)

Übergreifende Kompetenzen

Analysieren und Reflektieren: Die Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen. Zur erfolgreichen Bearbeitung werden Vorwissen, Vermutungen und Vergleiche ebenso herangezogen wie fachbezogene und fächerübergreifende Zugänge und Verfahren.

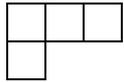
Strukturieren und Darstellen: Die Schülerinnen und Schüler sind fähig, aus der Auseinandersetzung mit einem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse zu formulieren und diese angemessen festzuhalten.

Sachinformation

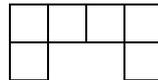
Pentominos (auch „Quadratfünflinge“ genannt) sind Quadratmehrlinge, die aus fünf kongruenten Quadraten bestehen. Sie gehören damit zu den sog. Polyominos (n-Minos).

Ein n-Mino entsteht, indem n kongruente Quadrate so aneinandergesetzt werden, dass je zwei benachbarte Quadrate eine gemeinsame Seite haben.

Beispiele für Polyominos:

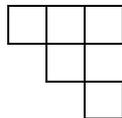
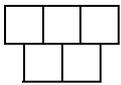


ein Tetromino (Vierling)

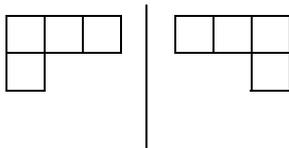


ein Hexomino (Sechsling)

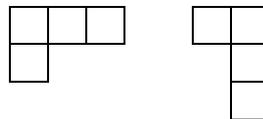
Gegenbeispiele:



Bei der Bestimmung der Anzahl der möglichen n-Minos werden nur alle nicht deckungsgleichen n-Minos mitgezählt. Nicht mitgezählt werden also gespiegelte oder gedrehte Figuren.



gespiegelt



gedreht

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl $A(n)$ der kongruenten n-Minos ($n=1, \dots, 7$), die sich aus n kongruenten Quadraten bilden lassen:

n	$A(n)$	Name
2	1	Domino
3	2	Triomino
4	5	Tetromino
5	12	Pentomino
6	35	Hexomino
7	708	Heptomino

Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
AB I: Reproduzieren	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler finden alle 12 Lösungen, indem sie Pentominos probierend legen, auf Kongruenz überprüfen und noch fehlende unter Anleitung herstellen.
AB II: Zusammenhänge herstellen	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Möglichkeit, durch systematisches Variieren Pentominos zu finden, und ergänzen noch fehlende unter Anleitung.
AB III: Verallgemeinern und Reflektieren	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler finden durch konsequent systematisches Variieren alle Pentominos und stellen ihre Systematik strukturiert dar.

Ausgestaltung der Lernaufgabe

Forscherauftrag:
„Finde alle 12 Fünflinge“

Material:

- Dose mit 5 Quadraten, 1 Zwilling, 2 Drillingen und 5 Vierlingen
- Gitterpapier

Gehe so vor:

1. Wenn du einen Fünfling gefunden hast, stelle ihn mit Hilfe des Gitterpapiers her.
2. Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

Hast du alle 12 Fünflinge gefunden?

⇒ Sortiere alle Fünflinge und zeichne sie so in dein Forschertagebuch.

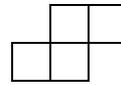
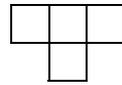
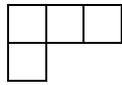
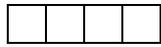
Brauchst du Hilfe, weil dir noch Fünflinge fehlen?

⇒ Lass dir eine Tippkarte geben.

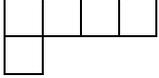
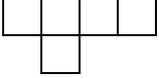
Gitterpapier

Tippkarte 1: „Aus Vierlingen werden Fünflinge“

Nimm aus der Dose die 5 Vierlinge.

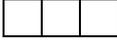


Lass um jeden Vierling ein Quadrat wandern.

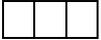
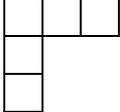
Aus  wird  , dann  ...


Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

Tippkarte 2: „Die längste Reihe“

Die längste Reihe des Fünflings besteht aus fünf Quadraten.		Es gibt 1 Lösung .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus vier Quadraten.		Es gibt 2 Lösungen .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus drei Quadraten.		Es gibt 8 Lösungen .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus zwei Quadraten.		Es gibt 1 Lösung .

Nimm die fehlende Anzahl an Quadraten und ergänze zu einem Fünfling.

Aus  zum Beispiel: 


Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

Erwartete Lernergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten den Forscherauftrag selbstständig in Einzelarbeit.

Sie nutzen dabei die Möglichkeit, auf verschiedenen Darstellungsebenen zu arbeiten: Sie können Fünflinge finden, indem sie sie erst legen (mit den 5 einzelnen Quadraten oder durch passendes Ergänzen von Zwillingen, Drillingen oder Vierlingen) und dann mit Gitterpapier herstellen. Sie können aber auch, weil sie zum mentalen visuellen Operieren in der Lage sind, auf das Legen verzichten.

Sie können rein probierend Fünflinge zu finden versuchen, aber auch bei ihrer Suche nach Fünflingen systematisch vorgehen.

Hinweise zum Unterricht

In der Schuleingangsphase stellen die Schülerinnen und Schüler ebene Figuren durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen, Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden oder Spannen auf dem Geobrett her.

Der Erwerb dieser Kompetenz ist damit jedoch nicht abgeschlossen. In einen komplexeren Handlungszusammenhang gestellt wird diese Kompetenz auch in den Klassen 3 und 4 weiter vertieft.

Wenn die Schülerinnen und Schüler am Forscherauftrag „Finde alle 12 Fünflinge“ arbeiten, können sie nicht nur konkret handelnd die 12 Fünflinge finden und auf Kongruenz überprüfen, sondern auch mental visuell operierend vorgehen, z. B. indem sie ein Quadrat um einen Vierling in der Vorstellung wandern lassen und auf diese Weise weitere Fünflinge finden und gefundene Fünflinge in der Vorstellung auf Kongruenz überprüfen.

Insofern ist der vorliegende Forscherauftrag für die Klasse 3 vorgesehen.

Es sind verschiedene Möglichkeiten denkbar, wie sich Schülerinnen und Schüler im Unterricht aktiv entdeckend mit Pentominos beschäftigen können. Eine Möglichkeit wird nachfolgend kurz skizziert.

Um den Forscherauftrag erfolgreich bewältigen können, sollten zuvor folgende Unterrichtssequenzen vorangegangen sein:

Die Schülerinnen und Schüler

- lernen die Bauregel für Quadratmehrlinge kennen,
- lernen den Begriff „deckungsgleich“ kennen,
- erfahren, dass deckungsgleiche Lösungen als nicht verschieden anzusehen sind und wie Quadratmehrlinge auf Deckungsgleichheit überprüft werden können (durch Drehung und/oder Spiegelung),
- bearbeiten den Forscherauftrag „Finde alle Zwillinge, Drillinge und Vierlinge“,
- erstellen ein Plakat, auf dem alle gefundenen Quadratmehrlinge aus 2, 3 und 4 Quadraten geordnet festgehalten werden. Ein Beispiel für ein solches Plakat findet sich in diesem Material.

Das Plakat birgt Anregungen, wie die 12 Fünflinge nicht (nur) probierend, sondern strategisch vorgehend gefunden werden können:

- Einerseits kann man ein Quadrat systematisch um die fünf Vierlinge wandern lassen. Bereits gefundene deckungsgleiche Fünflinge bleiben unberücksichtigt (**Strategie 1**). Aufgrund der vorangegangenen Unterrichtssequenzen werden die Schülerinnen und Schüler diese Strategie am ehesten verfolgen.
- Andererseits kann man die 12 Fünflinge ermitteln, indem man von 5 (4, 3, 2) Quadraten in einer Reihe als der jeweils längsten Reihe ausgeht und die jeweils fehlende Anzahl an Quadraten (systematisch vorgehend) ergänzt (**Strategie 2**). Bei Strategie 2 müssen also zunehmend mehr Quadrate passend ergänzt werden (erst 0 Quadrate, dann 1 Quadrat, dann 2 Quadrate und schließlich 3 Quadrate), um einen Fünfling zu erhalten. Da es nicht leicht ist, alle 8 möglichen Fünflinge zu finden, wenn die längste Reihe aus 3 Quadraten besteht, wählen Schülerinnen und Schüler diese Strategie von sich aus erfahrungsgemäß nur relativ selten.

Um Schülerinnen und Schülern,

- die entweder rein probierend vorgehen, Anregung zu geben, wie sie beim Finden strategisch vorgehen können, oder
- die nicht alle Fünflinge finden können, Hilfe anbieten zu können, gibt es zwei Tippkarten.

Tippkarte 1 sollte an die Schülerinnen und Schüler gegeben werden, die rein probierend vorgehen.

Bei Schülerinnen und Schülern, die noch nicht alle 12 Fünflinge gefunden haben, sollte Tippkarte 1 den leistungsschwächeren zugewiesen werden, den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern kann man die Wahl überlassen.

Nach Abschluss der Arbeitsphase ist es wichtig, den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu geben, sich in Kleingruppen oder im Klassengespräch über ihre Lernwege auszutauschen.

Vertiefung des Wissens:

Die folgenden beiden Forschungsaufträge tragen dazu bei, die Fähigkeit zum mentalen visuellen Operieren weiter zu vertiefen:

- Forschungsauftrag 1: „Aus welchen Fünflingen kannst du eine offene Schachtel basteln?“ (z. B. als Partnerarbeit)
- Forschungsauftrag 2: „Aus welchen der 35 Hexominos kannst du einen Würfel basteln?“ (z. B. als Gruppenarbeit)

Auf den Arbeitsblättern (Forschungsauftrag 1 bzw. Forschungsauftrag 2) können die Schülerinnen und Schüler nicht nur die passende Antwort ankreuzen, sondern auch, wie sie die Antwort jeweils gefunden haben, ob konkret handelnd (basteln) oder durch mentales visuelles Operieren (nachdenken).

Für das konkret handelnde Lösen (Basteln der Schachteln bzw. Würfel) stehen die Arbeitsblätter (Forschungsauftrag 1) und Materialien im Anhang zur Verfügung.

Material

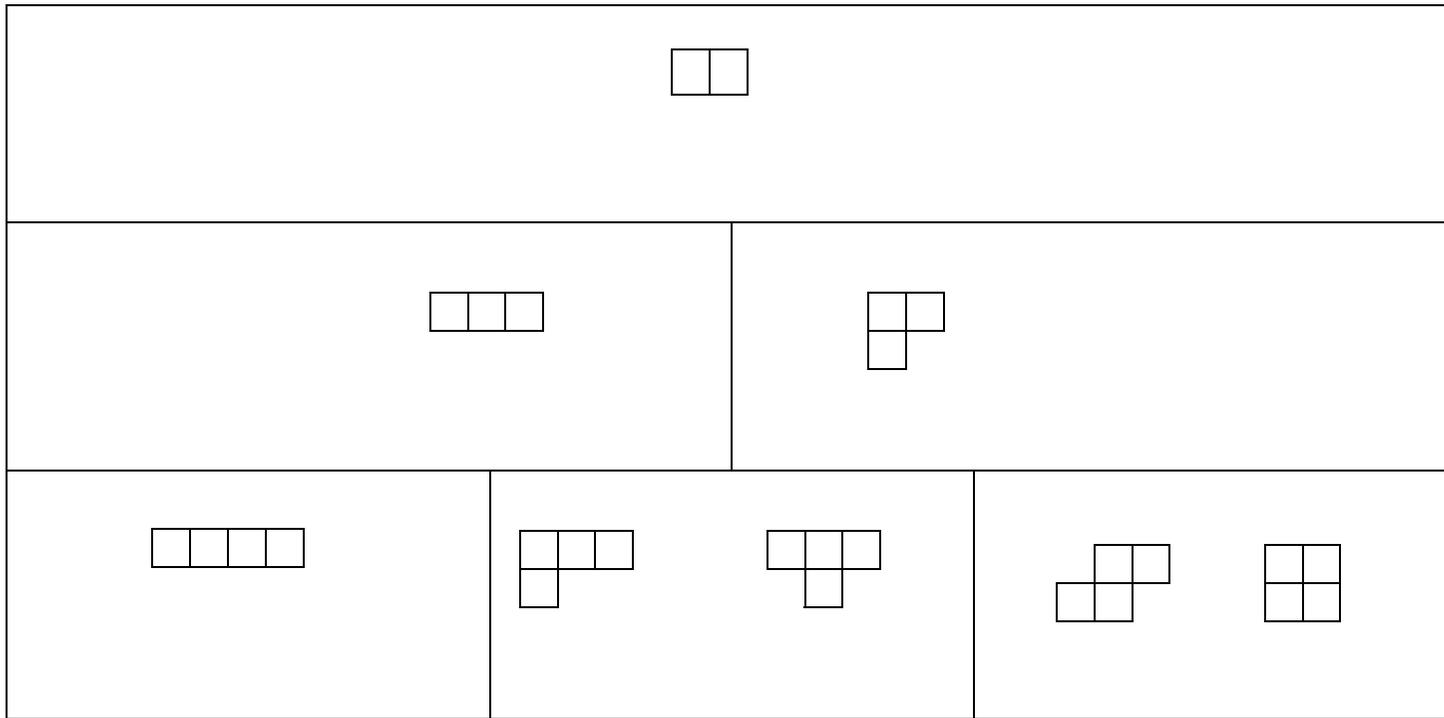
- **Forscherauftrag als Kopiervorlage**
- **Gitterpapier** zum Ausschneiden der 5 Quadrate und zum Ausschneiden der gefundenen Zwillinge, Drillinge, Vierlinge und Fünflinge **als Kopiervorlage**

Hinweis:

Um den Schülerinnen und Schülern die Überprüfung auf Kongruenz zu erleichtern, sollten die Trennlinien zwischen den Quadraten auf der Vor- und Rückseite der Quadratmehrlinge zu sehen sein. Dies kann entweder dadurch erreicht werden, dass Kopien mit bedruckter Vor- und Rückseite angefertigt werden, oder indem die Schülerinnen und Schüler gebeten werden, die durchscheinenden Trennlinien zwischen den Quadraten nach dem Ausschneiden auf der Rückseite nachzuzeichnen.

- **Tippkarten 1 und 2 als Kopiervorlagen**

Quadratmehrlinge



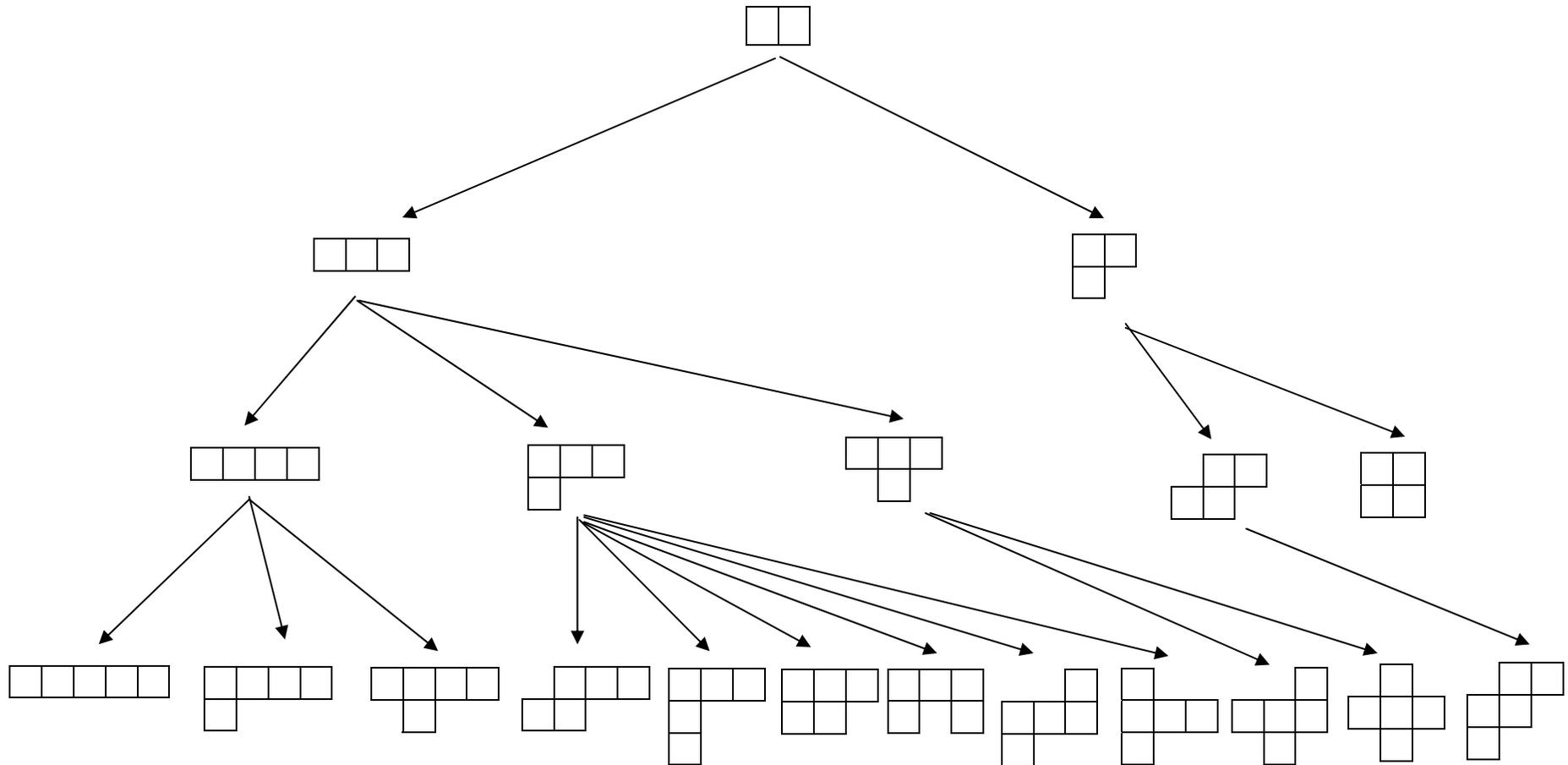
1 Zwilling

2 Drillinge

5 Vierlinge

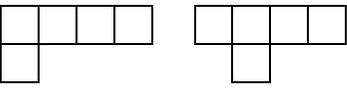
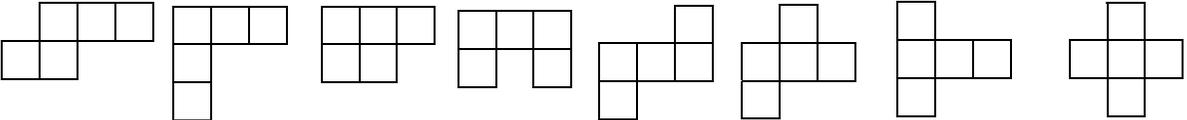
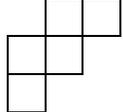
Bestimmung aller Pentominos (Strategie 1)

Nachfolgend werden rekursiv die 2 Triominos aus dem einen Domino, die 5 Tetrominos aus den 2 Triominos und die 12 Pentominos aus den 5 Tetrominos abgeleitet, wobei beim Variieren systematisch von links nach rechts vorgegangen worden ist und nur ein Pfeil für die erste mögliche Lösung eingezeichnet ist.



Bestimmung aller Pentominos (Strategie 2)

Ausgehend von fünf kongruenten Quadraten lassen sich die zwölf kongruenten Pentominos durch systematisches Variieren wie folgt bestimmen:

Die längste Reihe besteht aus fünf Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus vier Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus drei Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus zwei Quadraten.	

Aus dem Fünfling lässt sich eine Schachtel basteln. Kreuze an.

Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.

ja

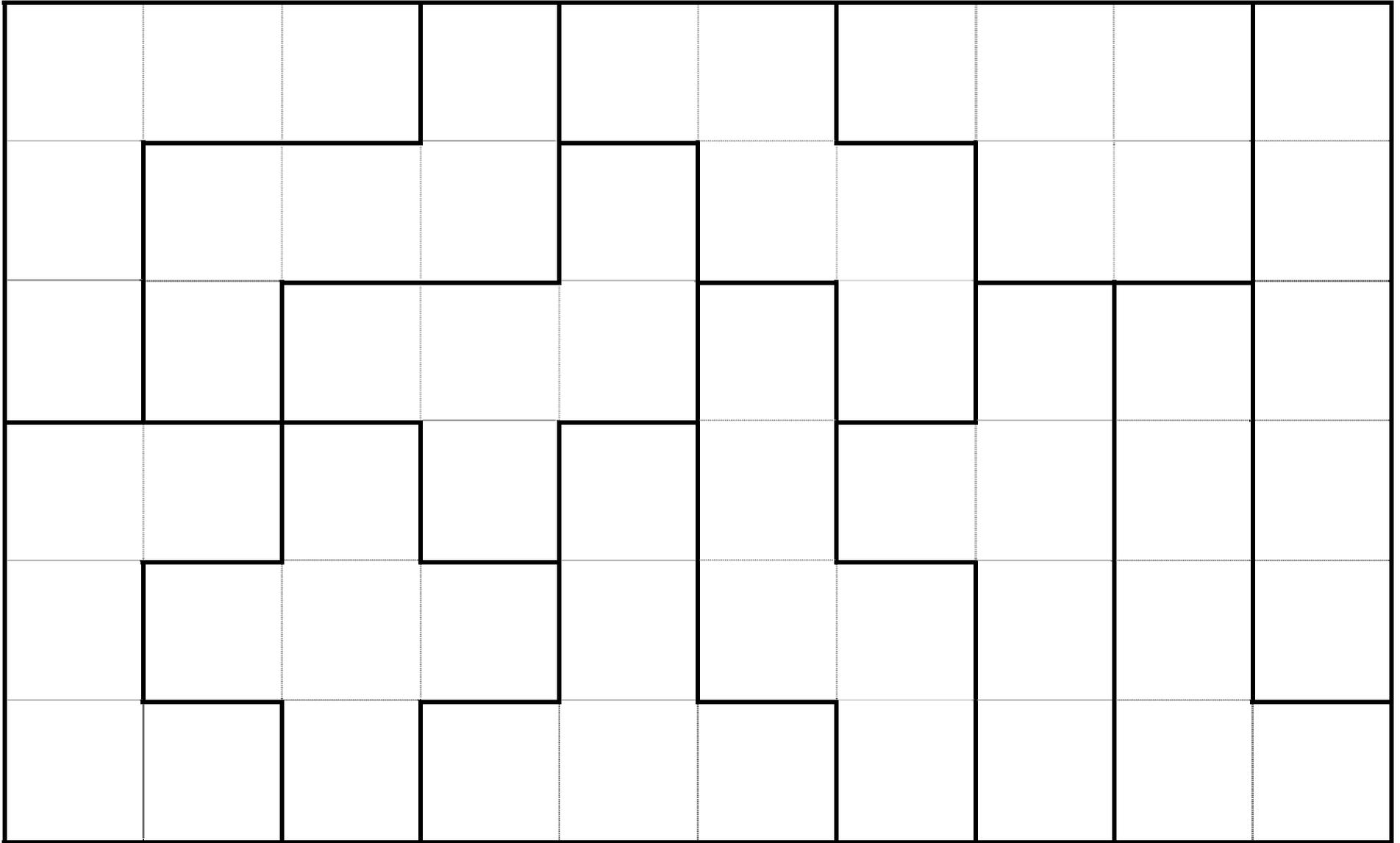
nein

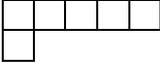
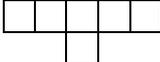
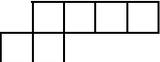
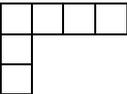
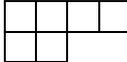
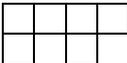
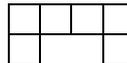
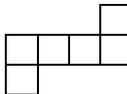
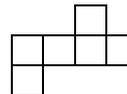
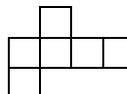


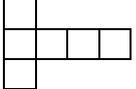
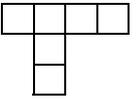
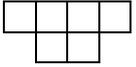
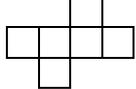
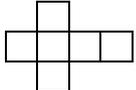
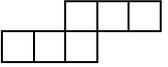
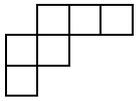
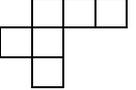
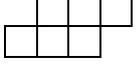
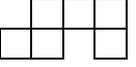
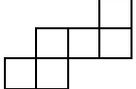
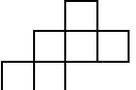
basteln

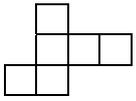
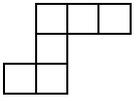
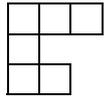
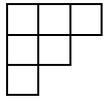
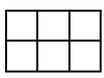
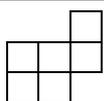
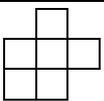
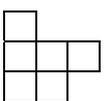
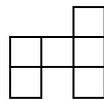
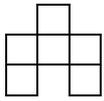
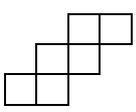


nachdenken



Der Sechserling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.			
		 basteln	 nachdenken		
ja	nein				
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

	Der Sechsling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.		
	ja	nein	 basteln	 nachdenken	
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

		Der Sechsling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.	
		ja	nein	 basteln	 nachdenken
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					

1					
---	--	--	--	--	--

2				

3				

4				

	5			

6			

7			

8			

9			

			10

		11	

		12	

13			

14			

