**Krebs durch Kernenergieanlagen? Jg. 9 - 10**

Schlüsselfrage:

Können erhöhte Leukämieraten rund um die Asse „Zufallsschwankungen“ sein?

**Kernlehrplanbezug**

Stochastik: verwenden Zufallsversuche zur Darstellung zufälliger Erscheinungen in alltäglichen Situationen

Argumentieren / Kommunizieren: Informationen aus authentischen Texten entnehmen, analysieren und beurteilen und

 mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten nutzen

Modellieren: Realsituationen werden in ein einfaches mathematisches Modell übersetzt und die Ergebnisse der Arbeit im Modell auf die Realsituation zurückbezogen

**Unterrichtliches Vorgehen**

Kernidee:

Durch einfache Würfelexperimente auf einem 6 x 6 Feld werden Cluster (räumliche Zusammenballungen) erzeugt. Die genauere Analyse dieser Cluster ermöglicht eine mathematikbasierte Einschätzung zur Beantwortung der Schlüsselfrage.

Ablauf im Detail:

Der Einstieg erfolgt über die Analyse eines gekürzten Zeitungsausschnitts aus DIE ZEIT:

Welche Rolle spielt der Zufall bei Leukämiecluster nahe der Asse? **🡪 M 10-3-2 AB 1 Atommülllager Rätsel um erhöhte Asse 2010 Die Zeit**

Vorgehensweise dabei:

Klärung der Fremdwörter ( z.B. erst in Partnerarbeit, dann im Unterrichtsgespräch)

Diskussion des Kern-Satzes mit den zufallsbedingten Schwankungen im Artikel

Abstimmung im Plenum, ob nach dem erreichten Diskussionsstand ein Zusammenhang zwischen Leukämiehäufigkeit und dem Atommülllage besteht oder nicht. 🡪 Dies erzeugt erfahrungsgemäß einen hohen Grad an Motivation.

Klären der Untersuchungsmethode:

Durch das Würfeln mit zwei normalen Würfeln soll untersucht werden, ob auffällige Häufungen (Cluster) rein zufällig entstehen können. Dabei kann man sich vorstellen, dass die 36 Felder des zur Verfügung stehenden 6 x 6 Feldes die Planquadrate auf einer Stadt- oder Landkarte darstellen. Dann wird mit dem Zufallsverfahren untersucht, ob zufällig auf der Karte eine Häufung von Treffern auftreten kann. 🡪 Vergleichen Sie hierzu auch die *Variante* der Erarbeitung mit der Auswahl von Adressen aus dem Telefonbuch weiter unten.

Erarbeitung:

Schülerinnen und Schüler würfeln in Gruppen (2 – 4 Schüler) mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln und markieren ihre Würfelergebnisse als Positionen (Striche) auf einem 6 x 6-Feld.

**🡪 M 10-3-3 AB 2 Dokumentation der Würfelergebnisse**

Die Schüler übertragen ihre Würfelergebnisse nach 36 Würfen auf eine Folie **🡪 M 10-3-4 Folie zur Auswertung der Würfelergebnisse**.

Die Folie ist so aufgebaut, dass unterschiedliche Gruppen ihre Strichlisten an unterschiedlichen Positionen eines Feldes unterbringen können, so dass durch das Übereinanderlegen der Folien eine Gesamtauswertung für die Lerngruppe möglich wird.

Auswertung:

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt im Plenum:

Hierbei ergibt sich: Alle Gruppen erkennen auffällige Häufungen. Die Cluster befinden sich aber an unterschiedlichen Stellen. Damit wird die Eingangsfrage beantwortet:

**Fazit:** Auch der Zufall produziert Cluster.

An dieser Stelle könnte der Unterricht enden. Erweiterungen sind durch eine genauere Betrachtung der Ergebnisse möglich:

*Erweiterung 1:*

Aufgabe a) im Arbeitsblatt zur Dokumentation der Würfelergebnisse ist das Protokollieren der Wurfzahl bei der zum ersten Mal ein Feld zweimal getroffen wird. Die Wahrscheinlichkeit für das Treffen eines beliebigen Feldes beträgt 1/36. Da die Würfelergebnisse stochastisch unabhängig sind („der Würfel hat kein Gedächtnis“), kann die „Doppeltrefferwahrscheinlichkeit“ nach z. B. dem siebten Wurf mithilfe einfacher Überlegungen bestimmt werden: Bis dahin wurden sechs verschiedene Felder markiert. Mit dem siebten Wurf wird eines der bereits markierten sechs Felder erneut getroffen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt 6/36 - ca. 17 %. Das bedeutet, dass es in fast einem Fünftel aller Experimente zu erwarten ist, dass nach dem 7. Wurf ein Feld zum zweiten Mal getroffen wird – entsprechende Überlegungen können aufgrund der Protokolle der Schülerinnen und Schüler bestätigt werden. Es wird aufgrund der Analyse auch schnell klar, dass bei steigender Wurfzahl die Doppeltrefferwahrscheinlichkeit rasch zunimmt. Im Durchschnitt haben wir nach sieben Würfen: 7/36 oder ca. 0,20 Markierungen („Leukämien“) pro Feld: Nur jedes 5. Feld enthält einen Strich. Im doppelt belegten Feld ist die Markierungsrate (das „Leukämierisiko“) also 10-fach überhöht: 2/0,2 = 10. In jedem der belegten Felder ist das „Risiko“ 5-fach überhöht: 1/0,2 = 5. Übertagen auf die Leukämieproblematik bedeutet dies: Bei kleinen Wahrscheinlichkeiten und relativ kurzen Versuchsserien ist eine Vervielfachung des Risikos leicht möglich. Dies macht deutlich, dass die häufig geäußerten Risikoüberhöhungen bei seltenen Krankheiten im Kern eine Fehlinformation sein kann, da sich die beobachteten relativen Häufigkeiten möglicherweise zufallsbedingt so voneinander unterscheiden. Aber natürlich kann auch ein kausaler Zusammenhang zwischen dem (potenziellen) Gesundheitsrisiko und den Erkrankungen nicht ausgeschlossen werden – nur: eine hinreichende „statistische Evidenz“ gibt es im obigen Fall kaum.

*Erweiterung 2:*

Die Würfelergebnisse werden in der Klasse kumuliert. Es ergibt sich etwa folgendes Bild, nachdem die Gruppen ihre Trefferzahlen nach 36 Würfen ausgewertet haben:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Anzahl der Treffer pro Feld** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **>4** |  |
| Gruppe 1 | 13 | 13 | 8 | 1 | 1 | 0 |
| Gruppe 2 | 11 | 15 | 9 | 1 | 0 | 0 |
| Gruppe 3 | 14 | 12 | 7 | 2 | 1 | 0 |
| Gruppe 4 | 15 | 10 | 6 | 5 | 0 | 0 |
| Gruppe 5 | 16 | 10 | 5 | 4 | 1 | 0 |
| Gruppe 6 | 11 | 18 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| **Summe** | **80** | **78** | **39** | **15** | **4** | **0** |
| **rel. Trefferzahl** | **37%** | **36%** | **18%** | **7%** | **2%** | **0%** |

Hieraus folgt, dass

* nach 36 Würfen ein Treffer pro Feld (bei 36 Feldern) zu erwarten wäre
* die dreifache Trefferzahl pro Feld gemessen an dem zu erwartenden einen Treffer aber durchaus häufig vorkommt (7 % der Felder im Versuch haben 3 Treffer)
* eine vierfache Überhöhung der Trefferzahl nicht ausgeschlossen, aber ausgesprochen selten ist

Auf diesem Hintergrund kann man nun die Aussage des Zeitungsartikels betrachten: In der Nähe der Asse wurden 18 Erkrankungen sind erfasst. Erwartbar waren nur acht Fälle.

Auf diese Weise ist einepropädeutische Einführung der Idee des Hypothesentests einschließlich der Fehlerarten auf dem Niveau der SI durch die Analyse der kumulierten Würfelergebnisse möglich.

*Erweiterung in der SII*

In der Sekundarstufe II kann der Unterricht hier in dieser Richtung weitergeführt werden. Stichwort z.B. Poisson-Verteilung. Bei Rechnereinsatz lassen sich die notwendigen Berechnungen aber auch mit Binominalverteilungen durchführen.

*Variante*

Eine Variante zum Würfeln auf einem 6x6 Feld stellt das Würfeln auf einem Stadtplan der eigenen Stadt dar. Hier können 36 Planquadrate festgelegt werden, die anschließend entsprechend dem oben beschriebenen Vorgehen ausgewürfelt werden können. Noch interessanter wird es, wenn die „Treffer“ auf dem Stadtgebiet zum Beispiel durch GPS-Koordinaten oder durch Adressen im Stadtgebiet, die zufällig bestimmt werden.

Hier kann das Verfahren zur Adressbestimmung vom Lehrer vorgegeben oder von den Schülergruppen selbst „erfunden“ werden. Dabei ergibt sich eine Umkehraufgabe zur klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung: Gesucht ist ein Zufallsverfahren, das bestimmte Daten liefert. **🡪 M 10-3-5 AB 4 Wie können Adressen zufällig bestimmt werden**

Literatur: Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens finden Sie unter: Uli Brauner, Andreas Büchter, Häufung von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen – alles Zufall!? in: Praxis Mathematik, Heft 48, 2012, Seite 10 – 16

Beck-Bornholdt, H.-P. & Dubben H.-H. (1997). Der Hund der Eier legt. Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.