

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Autoren:

S. Dreibholz

in Zusammenarbeit mit der QUA-LiS NRW

Juli 2014

Kurzbeschreibung

Als Einstieg in das o. g. Unterrichtsvorhaben wird im Kontext diagnostischer Testverfahren am Beispiel des AIDS-Tests ELISA ein medizinisches Testverfahren mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln exemplarisch modelliert. Dabei wird auf die Kenntnisse zur Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimenten in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln sowie die Berechnung zugehöriger Wahrscheinlichkeiten aus der SI und dem Unterrichtsvorhaben E-S1 zurückgegriffen.

Die Lernenden erfassen und strukturieren Informationen zu Sachsituationen und übersetzen diese in mathematische Darstellungsformen. Die Deutung von absoluten sowie relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten fördert ein vertieftes Verständnis der realen Zusammenhänge durch eine korrekte Interpretation der mathematisch ermittelten Ergebnisse.

Vertiefend wird die Bedeutung der Risikogruppe, der die jeweilige Testperson angehört, als maßgebliche Bedingung für die Wahrscheinlichkeit und für die Beurteilung des Testergebnisses betrachtet. Die stochastische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit als Eigenschaft zweier Merkmale wird im Kontext untersucht.

Zielsetzung

- Informationen aus Sachtexten werden mit Hilfe von Baumdiagrammen und Mehrfeldertafeln strukturiert dargestellt.
- Absolute und relative Häufigkeiten sowie Wahrscheinlichkeiten werden im Kontext erfasst und differenziert in Argumentations- und Modellierungsprozessen eingesetzt.
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden mithilfe der Regel von Bayes berechnet.
- Sachsituationen werden mithilfe der ermittelten rechnerischen Ergebnisse bewertet.
- Die Relevanz der ‚Bedingung‘ zur Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeit sowie die Bedeutung für die Darstellung im Baumdiagramm wird erfasst (umgekehrtes Baumdiagramm).
- Zwischen stochastisch abhängigen und unabhängigen Ereignissen wird unterschieden.

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	------------------	----------------------	--------------	----------	---------------	-----------

Das Unterrichtsvorhaben „Testergebnisse richtig interpretieren“ im Überblick**1. Unterrichtseinheit: Der HIV-Test – Bestimmung bedingter Wahrscheinlichkeiten (M1 – M5)**

Einführung in den Kontext „HIV-Test“ anhand aktuellen Datenmaterials, exemplarische Erarbeitung der Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten und anschließender Verallgemeinerung der Vorgehensweise.

2. Unterrichtseinheit: Western-Blot-HIV-Test: Bestätigungstest (M6)

Vertiefende Übung anhand eines weiteren Tests.

3. Unterrichtseinheit: HIV-Test positiv – und dann? (M7)

Kritische Betrachtung und Interpretation der ermittelten mathematischen Ergebnisse.

4. Unterrichtseinheit: Bedeutung der Prävalenz (M8)

Nutzung der Vierfeldertafel als weiteres Instrument zur Strukturierung und Auswertung von Datenmaterial.

5. Unterrichtseinheit: Ein verbesserter HIV-Test? (M9)

Abschließende Aufgabe, die sowohl Anwendung als auch Interpretation der Gelernten erfordert; kann auch als Testaufgabe verwendet werden.

Zeitbedarf: Insgesamt 6 Unterrichtsstunden

Für die 1. Unterrichtseinheit ist (mindestens) eine Doppelstunde erforderlich; um eine zeitliche Entlastung im Unterricht zu erreichen, können die Materialien im weiteren Verlauf auch vorbereitend bereits als Hausaufgabe bearbeitet werden.

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	-----------	-----------------------------	--------------	----------	---------------	-----------

Didaktische Hinweise

Das mathematische Konzept zur Erfassung des Phänomens „Zufall“ ist eine fundamentale Idee der Mathematik. Da das Lehren von stochastischen Inhalten zum tatsächlichen Verstehen der Erscheinungen von „Zufall“ in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler führen sollte, müssen richtige, intuitive Vorstellungen gefördert werden.

Die Regel von Bayes ermöglicht es, eine Wahrscheinlichkeit zu berechnen, wenn bedingtes und bedingendes Ereignis vertauscht werden müssen. Muss man Entscheidungen unter Unsicherheit und Risiko treffen, benötigt man diesen Kausalitätswechsel. Solche Folgerungen spielen zum Beispiel in der medizinischen Diagnostik, in der Justiz, bei wirtschaftlichen Entscheidungen eine Rolle, aber auch im täglichen Leben bei der Beurteilung von Medieninformationen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten nehmen aus kognitionspsychologischer Sicht eher eine „negativ-herausragende“ Rolle ein; eine Vielzahl von kognitiven Täuschungen wurde erforscht, beispielsweise Verwechslung von bedingtem und bedingendem Ereignis, also $P(A/B)$ mit $P(B/A)$ oder Schwierigkeiten bei der exakten Definition des bedingenden Ereignisses (z. B. beim „Drei-Türen-Problem“).¹

Bezogen auf das Inhaltsfeld Stochastik ist Unterricht sinnvoll und gewinnbringend über den Weg möglichst authentischer und konkreter Kontexte. Kenntnisse über die Aussagekraft des Ergebnisses eines medizinischen Tests, des Testverfahrens und des Einflusses der Basisrate auf die Interpretation des Testergebnisses sind von unmittelbarem Lebensbezug für junge Erwachsene. Insbesondere das Erkennen der Grenzen von Modellen schafft dabei Sensibilität für den Umgang mit Daten in allen Erscheinungsformen.

Das Unterrichtsvorhaben zum Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten startet mit der Fragestellung „Wie sicher ist der AIDS-Test?“. Zu Anfang soll mit *natürlichen Häufigkeiten* gearbeitet werden, die gerade zu Beginn die Realsituation viel deutlicher machen als die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten. Diese Besonderheit gegenüber traditionellen Zugängen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert auf kognitionspsychologischen Ergebnissen zur menschlichen Informationsverarbeitung. Eine Serie von Studien hat gezeigt, dass Menschen große Probleme haben, mit Wahrscheinlichkeiten (d.h. auf 1 normierte Maße) umzugehen. Einfacher und dem Verständnis zuträglicher scheint die kognitive Verarbeitung von absoluten Häufigkeiten (bzw. Verhältnissen natürlicher Zahlen) zu sein. Die erwähnten Studien belegen den Vorteil dieser Häufigkeitsdarstellungen gegenüber traditionellen Methoden sowohl im Hinblick auf den aktuellen und insbesondere auf den nachhaltigen Lernerfolg.²

Im weiteren Verlauf der Unterrichtssequenz wird die *Regel zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten* entwickelt und gesichert. Dazu werden verschiedene realitätsnahe Beispiele

¹ Wassner u. Krauss – Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? PM Praxis der Mathematik, Köln und Leipzig 2001.

² Wassner, C.: Förderung Bayesianischen Denkens. Hildesheim 2005.

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

in Unterricht und anschließender Klausur bearbeitet³: „Welche Aussagekraft hat eine DNA-Analyse? Wie verlässlich ist der BSE-Test? Mammographie-Screening: Überschätzen wir den Nutzen?“⁴

Eine innermathematische Vertiefung der Thematik erfolgt durch die Verwendung von Variablen im Baumdiagramm, die durch Fragen nach der Sensitivität bzw. Spezifität eines Tests bei vorliegenden Testergebnissen notwendig wird.

Die mathematische Abstraktion in Form des Satzes von Bayes ist über die Anwendung auf realitätsnahe Probleme hinaus nicht erforderlich. Auf die Formalisierung wird zugunsten einer Förderung und Sicherung des *stochastischen Verständnisses* der Sachverhalte über geeignete sprachliche und graphische Darstellungen verzichtet.

Das Häufigkeitskonzept ist eine Möglichkeit des Zugangs zu bedingten Wahrscheinlichkeiten. Es kann darüber hinaus auf andere Bereiche der Wahrscheinlichkeitsrechnung übertragen werden, z. B. auf Wahrscheinlichkeits-Verteilungen. Empirische Ergebnisse belegen außerdem, dass bayessche Problemstellungen in der Häufigkeitsform von Versuchspersonen deutlich besser gelöst werden als die üblichen Aufgaben in Wahrscheinlichkeitsform⁵: über eine kurzfristige Strategieübernahme hinaus wird eine nachhaltige Problemlösekompetenz erworben.

Der innerhalb des Themengebietes grundlegende Satz von Bayes gilt als didaktisch problematisch. Häufig treten in diesem Zusammenhang kognitive Fehlvorstellungen auf (z. B. beim „Ziegenproblem“⁶). Um diesen entgegenzuwirken, ist ein intuitives didaktisches Konzept von großer Bedeutung:

Bezogen auf die einführende Aufgabenstellung⁷ liefert die Regel von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

$$= \frac{0,0005 \cdot 0,999}{0,0005 \cdot 0,999 + 0,9995 \cdot 0,003} \approx 0,143$$

Bedingt durch die Fehlerquellen des Tests sind überraschenderweise nur rund 14 % der Personen mit positivem Testergebnis auch tatsächlich HIV-infiziert. Über diese Überraschung hinaus sollen die Schüler zu einer echten Einsicht kommen. Das Nachdenken und Reflektieren über diese Situation ist ein wesentlicher Baustein des stochastischen Denkens.

Das *Verständnis* für die obige Formel wird bei Schülern häufig nicht erreicht, da eine hohe Abstraktionsleistung erforderlich ist, die gerade in dieser Anfangsphase Schwierigkeiten bereitet. Zu befürchten ist auch ein routinehaftes mechanisches Einsetzen der in Wahrscheinlichkeiten versteckten Information in die auswendig gelernte Formel, was zwar zu richtigen Ergebnissen führt, jedoch nicht zum eigentlichen Verständnis des Satzes.

³ Pinkernell, G.: Test positiv – Diagnose negativ. – In: mathematik lehren, Heft138, Seelze-Velber 2006, S. 50 - 55

⁴ Stolze, C.: Die fremde Welt der Zahlen. – In: Die ZEIT Nr.33, 2002

⁵ Gigerenzer u.a. - Entscheidungsfindung unter Unsicherheit als fächerübergreifende Kompetenz: Alltagsorientierter Stochastikunterricht am Gymnasium. Berlin 1995

⁶ Sedlmeier, P. – Wahrscheinlichkeiten im Alltag. Braunschweig 2001.

⁷ Vgl. Arbeitsauftrag „Partnerpuzzle“

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die „richtige“ Vorstellung von den Resultaten wird zunächst durch eine Visualisierung des Sachverhaltes durch Vierfeldertafel und Baumdiagramm gefördert, wobei im Einstieg zunächst der Schwerpunkt auf die Darstellung im Baumdiagramm gelegt wird, da die möglichen Ereignisse in diesem zweistufigen Zufallsversuch auf diese Weise besonders übersichtlich dargestellt und besser verstanden werden können (vgl. Lösung zu M2A auf Seite 12). Zu diesem Zweck müssen die Informationen aus dem Aufgabentext erkannt und im Baumdiagramm notiert werden. Es soll erkannt werden, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(HIV^+|Test^+) = \frac{P(HIV^+ \cap Test^+)}{P(Test^+)}$$

berechnet werden muss.

Warum die Wahrscheinlichkeit für die Infektion nach einem positiven Test jedoch nur ca. 14 % beträgt, bleibt weiterhin im Dunkeln. Dazu erscheint es sinnvoll zu betrachten, welche Rolle nicht nur die Repräsentation der algorithmisch-strukturellen Eigenschaften, sondern auch die Repräsentation der gegebenen Information bei der kognitiven Verarbeitung spielt.

Benutzt man im Baumdiagramm natürliche Häufigkeiten, ausgehend von einer Grundgesamtheit von 18.000.000 Personen in NRW, wird das vormals verblüffende Ergebnis sichtbar (vgl. Lösung zu M2B auf Seite 12). Im Gegensatz zum Wahrscheinlichkeitsbaum lässt sich das wesentliche Problem der Aufgabe hier einfach verstehen: Obwohl die Infektion bei sehr vielen der tatsächlich Infizierten erkannt wird (8991 von 9000 Personen) und nur bei wenigen der Gesunden falsch diagnostiziert wird (53.973 von 17.991.000 Personen), gibt es trotzdem viel mehr Gesunde (53.973 Personen) als Infizierte (8991 Personen) mit positivem Testergebnis. Der Widerspruch zwischen Mathematik und Intuition ist aufgehoben.

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	-----------	----------------------	---------------------	----------	---------------	-----------

Hinweise zur Unterrichtsdurchführung

In einer knappen Lehrerinformation wird den Schülern zunächst eine Zielorientierung bezüglich Kontext (AIDS-Problematik) und Weiterentwicklung der bisher erarbeiteten stochastischen Modelle und Denkweisen gegeben. Zur Veranschaulichung der Problematik werden aktuelle Informationen zur Entwicklung der HIV-Infektionen sowie der Genauigkeit des AIDS-Tests ELISA präsentiert.

Impulsfrage: „Man stelle sich vor, eine beliebige Person aus NRW bekommt mitgeteilt, dass ihr Test positiv ist. Wie sicher kann sie sein, dass sie tatsächlich HIV-infiziert ist?“ Da die prozentualen Angaben für Sensitivität⁸ und Spezifität⁹ des HIV-Tests die hohe Zuverlässigkeit der Testergebnisse belegen, erwartet man „intuitiv“ eine hohe Sicherheit bei der Interpretation der Testergebnisse. Um im weiteren Unterrichtsverlauf darauf zurückgreifen zu können, machen die Schüler ihre Schätzungen auf einer vorbereiteten Skala individuell sichtbar¹⁰. Es ist zu erwarten, dass die Schätzwerte signifikant höher liegen als der wahre Wert.

In der anschließenden Erarbeitungsphase ermitteln die Schüler den wahren Wert der bedingten Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer HIV-Infektion bei vorliegendem positivem Testergebnis in Form eines Partnerpuzzles¹¹. Diese Arbeitsform ermöglicht methodisch ein hohes Maß an Schüleraktivierung sowie inhaltlich die zeitgleiche Bearbeitung der Problemstellung mittels Wahrscheinlichkeits- und Häufigkeitsansatz. Da sich die Schüler gegenseitig über ihre verschiedenen Lösungsansätze unterrichten, ergibt sich die Möglichkeit, beide Lösungsansätze miteinander zu vergleichen und auf diesem Wege zu einem tiefer gehenden Verständnis des zunächst überraschenden Ergebnisses zu gelangen, wobei besonders der Blick auf die natürlichen Häufigkeiten – wie bereits dargelegt – das Verständnis erleichtern sollte.

Innerhalb des Arbeitsauftrages liegt eine Modellierung mit Hilfe eines Baumdiagramms nahe. Unterstützung bei Schwierigkeiten im Erkennen der „bedingten“ Wahrscheinlichkeit, die eine Anteilsbildung erforderlich macht, erfolgt durch das Angebot von zielführenden Hinweisen in Form von Hilfekarten, die individuell von den Schülern in Anspruch genommen werden können. Diese Hilfekarten sind in ihrer Zielführung gestuft nach dem Prinzip der minimalen Hilfe, um den Grad an selbstständigem Arbeiten und selbstständiger Problemlösung so hoch wie möglich zu halten.

Die Arbeitsergebnisse werden präsentiert und mit Blick auf die Frage, warum es „trotzdem“ sinnvoll ist, den Test durchzuführen, mit den abgegebenen Schätzwerten verglichen. Auf der

⁸ Sensitivität eines Tests: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein tatsächlich erkrankter Mensch positiv getestet wird (Richtigpositivrate).

⁹ Spezifität eines Test: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gesunder Mensch negativ getestet wird (Richtignegativrate).

¹⁰ Jeder Schüler visualisiert seine Schätzung mittels eines Klebepunktes auf einer für alle sichtbaren Skala (Plakat)

¹¹ Brüning, L./Saum, T. – Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen, NDS-Verlagsgesellschaft, Essen 2006, S. 76 ff.

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

mathematischen Modellebene wird die Regel von Bayes formuliert. Die Auswertung der Präsentation dient als Ergebnissicherung, so dass der Stand des Weiterarbeitens für alle eine verbindliche Basis hat.

Eine konsequente Folgerung aus der großen Unsicherheit des Testergebnisses ist die Entwicklung von Fragestellungen, deren Beantwortung Relevanz für den Umgang mit dieser Unsicherheit hat:

1. Durchführung eines zweiten (anderen) Tests (vgl. M6)
2. Relevanz des Themas (vgl. M7)
3. Einfluss der Prävalenz¹² auf das Testergebnis (vgl. M8)
4. Bestimmung von Sensitivität und Spezifität eines verbesserten AIDS-Tests (vgl. M9)

In einem Schreibgespräch können die Schüler diese Ideen entwickeln. Fehlende Aspekte werden in einer anschließenden Sammlungsphase ergänzt.

Die Aufgaben M6 – M8 dienen der vertieften kontextualisierten Auseinandersetzung. Bedeutsam ist neben den Kennwerten des Tests (Sensitivität, Spezifität) besonders eine Aussage darüber, wie verbreitet die Erkrankung in der jeweiligen Risikogruppe der getesteten Person ist (Prävalenz). Die Lernenden modellieren mit Hilfe von Vierfeldertafeln oder Baumdiagrammen den jeweiligen Kontext. Sie erweitern ihre Kompetenz im sinnstiftenden Umgang mit absoluten und relativen Häufigkeiten sowie Wahrscheinlichkeiten. Sie begründen auf der Basis der ermittelten Ergebnisse ihre Entscheidungen.

Fortsetzung des Unterrichtsvorhabens

- **Berücksichtigung eines weiteren Kontextes (Übertragbarkeit des Verfahrens):**
Lohnenswerte Kontextualisierungen bieten z. B. Dunkelfeldforschung, DNA-Analyse

- **Verwendung digitaler Werkzeuge:**

Der Einsatz einer Tabellenkalkulation eröffnet die Möglichkeit, Mehrfeldertafeln leicht digital zu erfassen und durch Variation der natürlichen Häufigkeiten deren Einfluss auf andere Parameter zu beobachten und zu interpretieren.¹³

¹² Häufigkeit des Vorkommens einer Erkrankung in bestimmten Bevölkerungsgruppen

¹³ siehe dazu auch: Pallack, A. (Hrsg.) – „Daten und Zufall im Mathematikunterricht: Mit neuen Medien verständlich erklärt.“, Cornelsen Scriptor, 2012

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	-----------	----------------------	--------------	-----------------	---------------	-----------

Material**M1: Immer mehr Menschen leben in Deutschland mit einer HIV-Infektion*****Pressemitteilung des Robert Koch-Instituts (RKI)***

In Deutschland lebten Ende 2012 nach einer Schätzung des Robert Koch-Instituts 78.000 Menschen mit einer HIV-Infektion. In der Altersgruppe der über 40-Jährigen hat sich die Zahl der mit HIV-lebenden Personen seit Anfang der 1990er Jahre fast verfünffacht. Die erfolgreiche Einführung der antiretroviralen Therapie Mitte der 1990er Jahre führte dazu, dass Menschen mit einer HIV-Infektion immer länger leben und die Sterblichkeit deutlich verringert ist. Gleichzeitig bleibt aber die Zahl der HIV-Neuinfektionen in den letzten Jahren unverändert auf hohem Niveau. [...]

Die Zahl der HIV-infizierten Personen, die noch keinen HIV-Test durchgeführt haben und die daher nicht wissen, dass sie sich mit HIV infiziert haben, wird auf ca. 14.000 Personen geschätzt. Über 30% dieser Personen sind in der Altersgruppe zwischen 25 und 34 Jahren. Knapp ein Viertel der Personen, die mit HIV leben, aber noch nicht von ihrer HIV-Infektion wissen, hat sich erst im Laufe des Jahres 2012 infiziert. [...]

Die Zahl der HIV-Neuinfektionen hat sich von Spitzenwerten Mitte der 1980er Jahre bis Ende der 1990er Jahre deutlich verringert. Von 2000 bis circa 2005 erfolgte wieder ein Anstieg der HIV-Neuinfektionen, mit einer Plateaubildung ab 2006.

HIV/AIDS in Deutschland – Eckdaten

Epidemiologische Kurzinformation des Robert Koch-Instituts (Stand: Ende 2012)

Geschätzte Zahl der Menschen, die Ende 2012 mit HIV/AIDS leben:

Gesamt	~ 78.000
Männer:	~ 63.000
Frauen:	~ 15.000
darunter Kinder :	~ 200

Quelle: Robert Koch-Institut, 11.11.2013, www.rki.de

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

M2A: Arbeitsauftrag A

Partner A:

Verwende in deiner Lösung **Wahrscheinlichkeiten!**

Partnerpuzzle



Was?	Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der eine positiv getestete Person in NRW tatsächlich HIV-infiziert ist.
Wie?	<ol style="list-style-type: none"> Entnehme dem untenstehenden Test die Testdaten. Stelle die beschriebene Situation in einem geeigneten Modell graphisch dar. Vergleiche die Lösung mit deiner Nachbarin/deinem Nachbarn. Erkläre deinem Gegenüber deine Lösung und umgekehrt. Tausche dich mit deiner Nachbarin/deinem Nachbarn darüber aus, ob alles verstanden wurde.
Mit wem?	1. allein 2. Nachbar/in 3. Gegenüber 4. Nachbar/in
Hilfe?	Unterrichtsaufzeichnungen / Hilfekarten
Zeit?	20 Minuten (je Phase ca. 5 min)
Was passiert mit dem Ergebnis?	<ul style="list-style-type: none"> - Kurze Präsentation im Plenum - Vergleich mit der geschätzten Wahrscheinlichkeit

Wie sicher ist der AIDS-Test?

Der sogenannte AIDS-Test ist einer der zuverlässigsten Tests, die jemals entwickelt wurden. Er wird eingesetzt, um eine Infektion mit HIV festzustellen(*). Wegen der hohen Gefahr der Verbreitung der tödlichen HIV-Infektion war sogar lange Zeit in der Diskussion, ob nicht die gesamte Bevölkerung zum AIDS-Test gezwungen werden soll.

Der AIDS-Test ist aber nicht perfekt. Wenn jemand HIV-infiziert ist, soll der Test positiv sein. Zu 99,9% fällt er dann auch positiv aus (Sensitivität). Andererseits, wenn jemand nicht HIV-infiziert ist, soll der Test natürlich negativ sein. Zu 99,7% fällt er dann tatsächlich negativ aus (Spezifität).

Angenommen für alle Menschen in NRW soll ein AIDS-Test durchgeführt werden. Laut Schätzung des Robert-Koch-Instituts sind bundesweit 0,05% der Bevölkerung HIV-infiziert (Prävalenz), die Quote kann auch für NRW angenommen werden. Die Bevölkerungsstatistik sagt, dass in NRW 18.000.000 Menschen leben.

(* Im Sprachgebrauch hat sich AIDS-Test eingebürgert. AIDS bezeichnet eigentlich die Krankheit, die man bekommen kann, wenn man mit HIV infiziert ist. HIV kommt vom engl. „human immunodeficiency virus“ = „Immunschwäche-Virus beim Menschen“.

Quelle: R.Biehler – Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Bd. 5, 2007

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

M2B: Arbeitsauftrag B

Partner B:Verwende in deiner Lösung **absolute Häufigkeiten!**

Partnerpuzzle



Was?	Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der eine positiv getestete Person in NRW tatsächlich HIV-infiziert ist..
Wie?	<ol style="list-style-type: none"> Entnehme dem untenstehenden Test die Testdaten. Stelle die beschriebene Situation in einem geeigneten Modell graphisch dar. Vergleiche die Lösung mit deiner Nachbarin/deinem Nachbarn. Erkläre deinem Gegenüber deine Lösung und umgekehrt. Tausche dich mit deiner Nachbarin/deinem Nachbarn darüber aus, ob alles verstanden wurde.
Mit wem?	1. allein 2. Nachbar/in 3. Gegenüber 4. Nachbar/in
Hilfe?	Unterrichtsaufzeichnungen / Hilfskarten
Zeit?	20 Minuten (je Phase ca. 5 min)
Was passiert mit dem Ergebnis?	<ul style="list-style-type: none"> - Kurze Präsentation im Plenum - Vergleich mit der geschätzten Wahrscheinlichkeit
Was tut ihr, wenn ihr fertig seid?	Lies die Textpassagen zum Thema: „AIDS-Test positiv – und dann?“
Check!	Alles erledigt?

Wie sicher ist der AIDS-Test?

Der sogenannte AIDS-Test ist einer der zuverlässigsten Tests, die jemals entwickelt wurden. Er wird eingesetzt, um eine Infektion mit HIV festzustellen(*). Wegen der hohen Gefahr der Verbreitung der tödlichen HIV-Infektion war sogar lange Zeit in der Diskussion, ob nicht die gesamte Bevölkerung zum AIDS-Test gezwungen werden soll.

Der AIDS-Test ist aber nicht perfekt. Wenn jemand HIV-infiziert ist, soll der Test positiv sein. Zu 99,9% fällt er dann auch positiv aus (Sensitivität). Andererseits, wenn jemand nicht HIV-infiziert ist, soll der Test natürlich negativ sein. Zu 99,7% fällt er dann tatsächlich negativ aus (Spezifität).

Angenommen für alle Menschen in NRW soll ein AIDS-Test durchgeführt werden. Laut Schätzung des Robert-Koch-Instituts sind bundesweit 0,05% der Bevölkerung HIV-infiziert (Prävalenz), die Quote kann auch für NRW angenommen werden. Die Bevölkerungsstatistik sagt, dass in NRW 18.000.000 Menschen leben.

(* Im Sprachgebrauch hat sich AIDS-Test eingebürgert. AIDS bezeichnet eigentlich die Krankheit, die man bekommen kann, wenn man mit HIV infiziert ist. HIV kommt vom engl. „human immunodeficiency virus“ = „Immunschwäche-Virus beim Menschen“.

Quelle: R.Biehler – Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Bd. 5, 2007

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

M4: Hilfekarten

1. Bestimme die Struktur des Baumdiagramms. Welche Eigenschaft steht auf der ersten, welche auf der zweiten Stufe?
2. Bestimme alle Pfade, die zu ‚Test positiv‘ führen. Setze ‚HIV-positiv und Test positiv‘ dazu ins Verhältnis.
3. Berechne den Anteil von ‚HIV-positiv und Testpositiv‘ zu ‚Test positiv‘

M5: Ergebnisse

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich nicht auf die Gesamtzahl, sondern nur auf die Fälle, die eine bestimmte Bedingung bereits erfüllen: z. B.

„HIV-infiziert“ unter der Bedingung „Test positiv“.

Das trifft für 8 991 von 62964 Personen zu.

$$P(\text{HIV}^+ \mid \text{Test}^+) = \frac{8991}{62964} \approx 14,28 \%$$

Merkmals | Bedingung

Regel von Bayes

$$P(\text{Merkmals} \mid \text{Bedingung}) = \frac{\text{Anzahl der Fälle, die Merkmals und Bedingung erfüllen}}{\text{Anzahl der Fälle, die die Bedingung erfüllen}}$$

Beachte!

$P(\text{HIV}^+ \mid \text{Test}^+)$ unterscheidet sich von

$P(\text{Test}^+ \mid \text{HIV}^+)$!

$$P(\text{Test}^+ \mid \text{HIV}^+) = \frac{8991}{9000} \approx 99,9 \%$$

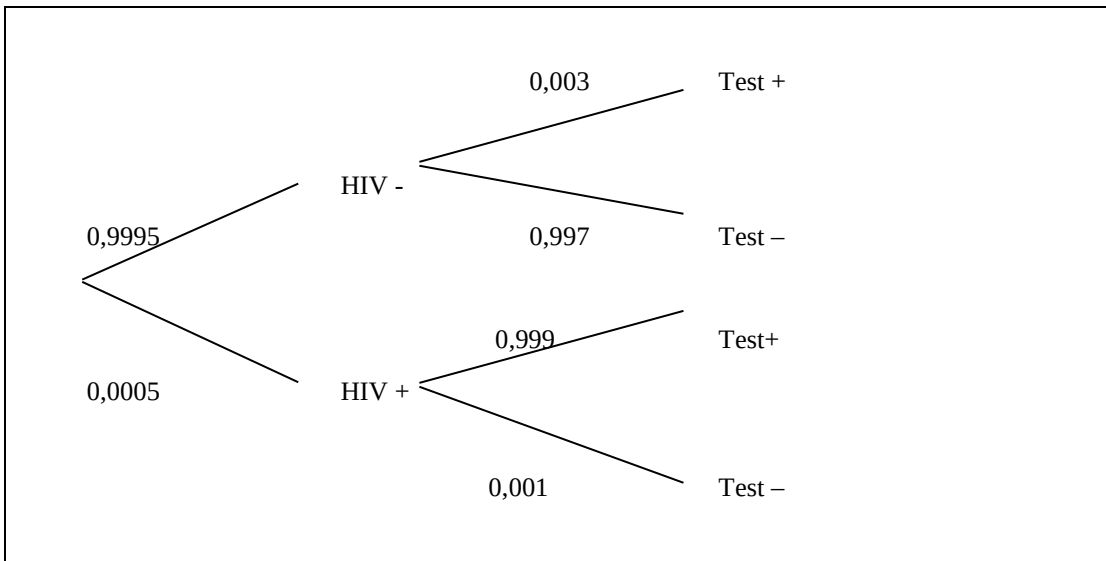
Merkmals | Bedingung

Die Wahrscheinlichkeit für „Test positiv“

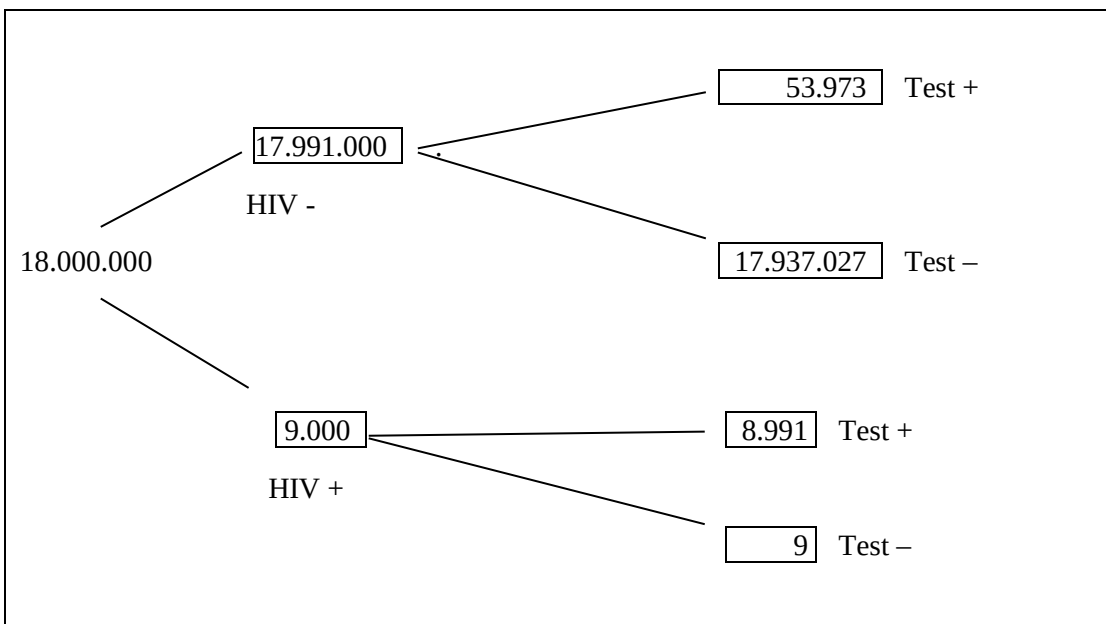
Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Lösungen

zu M2A: Arbeitsauftrag A



zu M2B: Arbeitsauftrag B



*Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten***M6: Western-Blot-HIV-Test : Bestätigungstest**

Der *Western-Blot-HIV-Test* wird zum Ausschluss von falsch-positiven ELISA-Tests genutzt. Der Western-Blot-Test ist deutlich teurer und aufwändiger als der ELISA-Test und wird daher nur eingesetzt, wenn der ELISA-Test positiv ausgefallen ist. Gemäß der aktuellen WHO-Empfehlung wird die Diagnose ‘HIV-positiv’ auf Grund von Antikörpern gegen zwei verschiedene Virusproteine gestellt. Das Vorhandensein dieser Proteine wird per Western-Blot-Test überprüft und der zuvor positive ELISA-Test widerlegt oder bestätigt. Hierdurch wird eine größere Testsicherheit erreicht: Bei einer HIV-infizierten Person ist er zu 99,8% positiv, bei einer nicht HIV-infizierten Person ist er zu 99,9% negativ.

Der Test in unserem Beispiel war ein ELISA-Test. Wir hatten 62964 positive Testfälle, aber nur 8991 HIV-Infektionen. Die positiven Testfälle sollen mit einem Western-Blot-Test überprüft werden.

- a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person HIV-infiziert ist, wenn auch der Western-Blot-Test positiv ist.*
- b) *Beurteile die Sicherheit des Ergebnisses. Was geschieht, wenn auch der Western-Blot-Test ein positives Ergebnis hat?*

*Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten***M7: HIV-Test positiv – und dann?**

Ein Brief aus Kalifornien an Prof. Dr. Gigerenzer, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin:

[...] Then - two weeks ago, I had an HIV test. I'm newly married and newly pregnant, and the test is a standard procedure now for pregnant women. They called me a week later and said I had tested positive for HIV. I asked about the false positive rate; the doctor told me it was 5/100,000. They gave me some handouts from the internet about living with HIV, and sent me off to tell my husband and my family the news.

It was a bad evening and next morning, but at work the next day I got to thinking... I reread your article, considered my low-risk lifestyle, and began to feel some hope. I went with my husband that weekend to a different clinic, where they had the 20-minute pinprick test, and we both tested negative; every subsequent test has been negative.

Your article saved me from a degree of despair I cannot even put into words; it gave me enough stamina to continue to research the issue and get tested again immediately.

I appreciate the article for its contribution to the risk assessment arena, but I also wanted to tell you how important it was to me on a much deeper level.

Sincerely,

Amy D'Andrade, Berkeley, California, November 2004

Kommentar von Prof. Dr. Gigerenzer:

Die Fehleinschätzungen sind keine Überraschung. Es gibt einige Untersuchungen darüber, dass auch ‚Experten‘ oft falsch liegen. Es wurden 20 professionelle AIDS-Berater (14 Ärzte und 6 Sozialarbeiter) befragt. Ein Student ließ bei sich 20mal einen HIV-Test machen und fragte genau die Frage nach dem positiven Vorhersagewert. Das Ergebnis war erschreckend.

10 der Berater behaupteten fälschlich, dass bei einem Mann, der keiner Risikogruppe angehört, eine Infektion völlig (also zu 100%) sicher ist, wenn der HIV-Test positiv ausfällt. 5 weitere Berater erklärten, diese Wahrscheinlichkeit liege bei 99,9% oder darüber. 2 weitere Berater vermieden es erfolgreich, diese Frage zu beantworten. Nur 3 Berater schätzten, dass die Wahrscheinlichkeit unter 99,9% liegt, gaben aber sämtlich einen Wert über 90 Prozent an.

Erörtern Sie auf der Grundlage der Daten des Robert-Koch-Instituts (M1) sowie in Kenntnis der Sensitivität und Spezifität des ELISA-HIV-Tests (M2) die Sinnhaftigkeit eines Screenings() auf HIV in Deutschland.*

(*) Als Screening bezeichnet man Früherkennungsuntersuchungen, die an großen Bevölkerungsgruppen reihenweise durchgeführt werden.

*Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten***M8: Bedeutung der Prävalenz**

HIV-Infektionen sind bei bestimmten Bevölkerungsgruppen deutlich häufiger als bei anderen, z. B. bei homosexuellen Männern, intravenös spritzenden Drogenabhängigen, etc.

Den Anteil der Erkrankten in einer solchen Bevölkerungsgruppe bezeichnet man als *Prävalenz* (Verbreitung). Bei der Gruppe der intravenös spritzenden Drogenabhängigen liegt die Prävalenz von HIV in der Bundesrepublik bei ca. 3-6%.

In einer Pilotstudie des Robert-Koch-Instituts wurden in Berlin 337 intravenös spritzende Drogenabhängige auf HIV getestet; bei 13 Personen wurde eine HIV-Infektion diagnostiziert. Insgesamt schätzt man die Zahl der in Berlin lebenden intravenös Drogenabhängigen auf 8000 Personen.

(Quelle: Robert-Koch-Institut: *Epidemiologisches Bulletin* Nr.33 vom 20.8.2012)

a) Fülle anhand der Daten folgende Tabelle aus:

	HIV-infiziert	Nicht HIV-infiziert	Summe
Test +			
Test -			
Summe			

- b) Bei einer Person aus Berlin, die regelmäßig Heroin spritzt, wird ein ELISA-AIDS-Test durchgeführt. Der Test weist ein positives Ergebnis auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person tatsächlich HIV-infiziert?
- c) Erkläre anhand eines Datenvergleichs, warum die Wahrscheinlichkeit viel höher ist als bei einem positiven Testergebnis bei einer beliebigen Person aus NRW.
- d) In einer Stadt mit 100000 Einwohnern ist die Prävalenz für eine HIV-Infektion nicht bekannt. Untersuche den Zusammenhang zwischen der Prävalenz und der Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion untersucht werden, wenn der ELISA-Test ein positives Ergebnis aufweist. Untersuche mithilfe einer Tabellenkalkulation die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Prävalenz zwischen 0% und 1%.

*Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten***M9: Ein verbesserter HIV-Test?**

(Hinweis: auch als Testaufgabe verwendbar)

Das Pharmaunternehmen SANOCHEMIA behauptet, einen verbesserten HIV-Test entwickelt zu haben als den bewährten ELISA-Test. 1000000 Proben von Versuchspersonen wurden untersucht, bei 1998 Personen war der Test positiv, ansonsten negativ. Die Proben durchliefen anschließend das bekannte Testverfahren (ELISA, Western-Blot und weitere Tests), so dass man weiß, welche Personen tatsächlich infiziert waren. Von den positiv getesteten waren tatsächlich 999 HIV-infiziert, von den negativ Getesteten waren tatsächlich 998 001 nicht HIV-Infiziert.

a) *Bestimme die neuen Testparameter:*

1. *Sensitivität:*

Berechne die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis, wenn tatsächlich eine HIV-Infektion vorliegt (richtig-positiv).

2. *Spezifität:*

Berechne die Wahrscheinlichkeit für ein negatives Testergebnis, wenn keine HIV-Infektion vorliegt (richtig negativ).

b) *Berechne und unterscheide von den Ergebnissen in a):*

1. *Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion, wenn das Testergebnis positiv ist.*

2. *Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion und einen positiven Test.*

c) *Beurteile, ob der neue Test wirklich besser ist.*

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	-----------	----------------------	--------------	----------	---------------	-----------

Lehrplanbezug

Thema: <i>Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)</i>	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. <p>Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):</p> <p>Modellieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (<i>Strukturieren</i>) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (<i>Mathematisieren</i>) beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (<i>Validieren</i>) <p>Kommunizieren <i>Die Schülerinnen und Schüler</i></p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen Texten [...] (<i>Rezipieren</i>) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (<i>Produzieren</i>) 	<p><i>Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes könnte das HIV-Testverfahren dienen, eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnostetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).</i></p> <p>Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden.</p> <p>Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet.</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können.</p> <p>Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.</p>

Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Kurzbeschreibung	Übersicht	Didaktische Hinweise	Durchführung	Material	Lehrplanbezug	Literatur
------------------	-----------	----------------------	--------------	----------	---------------	-----------

Weiterführende Literatur

- Atmaca, Silke und Stefan Krauss: Der Einfluss der Aufgabenformulierung auf stochastische Performanz – „Das Drei-Türen-Problem“. In: Stochastik in der Schule, Band 21, Heft 3, S. 14 ff. Dortmund 2001.*
- Büchter, Andreas und Hans-Wolfgang Henn: Elementare Stochastik – eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. 2. überarb. und erw. Aufl., Berlin : Springer 2007.*
- Gigerenzer, Gerd: Das Einmaleins der Skepsis – Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken. Berlin : Berliner Taschenbuch Verlag, 2004.*
- Gigerenzer, Gerd u.a.: Entscheidungsfindung unter Unsicherheit als fächerübergreifende Kompetenz: Alltagsorientierter Stochastikunterricht am Gymnasium., Berlin 1995.*
- Kilian, Hans: Plädoyer für „natürliche“ bedingte Wahrscheinlichkeiten. In: Stochastik in der Schule, Band 25 , Heft 2, S. 36 ff. Dortmund 2005.*
- Krauss, Stefan: Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept“. In: Stochastik in der Schule, Band 23, Heft 1, Dortmund 2003.*
- Pallack, A. und Ursula Schmidt (Hrsg): Daten und Zufall im Mathematikunterricht. S. 74-80. Berlin : Cornelsen 2012.*
- Puscher, Regina (Hrsg.): Problemorientierte Stochastik – Stochastik-Sammlung 1: Von Regenwahrscheinlichkeiten, Verhütung, Teddybären und anderen Zufällen im Alltag, Appelhülsen : MUED 1999.*
- Pinkernell, Guido: Test positiv – Diagnose negativ. In: mathematik lehren, Heft 138, S. 50 ff. Seelze-Velber : Friedrich-Verlag 2006.*
- Sedlmeier, Peter und Detlefs Köhlers: Wahrscheinlichkeiten im Alltag: Statistik ohne Formeln. Braunschweig : Westermann 2001.*
- Stolze, Claudia: Die fremde Welt der Zahlen. – In: Die Zeit Nr. 33, Hamburg : Zeitverlag Gerd Bucerius 2002.*
- Wassner, Christoph: Förderung Bayesianischen Denken: kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim, Berlin : Franzbecker 2004.*
- Wassner, Christoph und Stefan Krauss, Laura Martignon: Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? In: PM, Praxis der Mathematik 44, Köln und Leipzig : Aulis-Verlag 2001.*
- Wassner, Christoph; Rolf Biehler und Stefan Schweynoch; Martignon, Laura: Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit. Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik, Kassel : Universitätsbibliothek 2007.*