# Von der Schnittpunktberechnung zur Untersuchung der Lagebeziehungen zweier Geraden

**Autoren:**
U. Hackfort
Dr. V. Schubert
in Zusammenarbeit mit der QUA-LiS NRW

Dezember 2014

## Kurzbeschreibung

Das vorliegende Unterrichtsbeispiel soll einen Weg aufzeigen, Lagebeziehungen von zwei Geraden auf der Basis der Schnittpunktproblematik zu erkunden. Dabei spielt der GTR als Werkzeug eine zentrale Rolle, da das zughörige Gleichungssystem mit dem GTR nicht nur gelöst, sondern in einem zweiten Schritt auch mit Hilfe der Befehle `ref` oder `rref` schrittweise analysiert werden kann. Des Weiteren spielt die logische Aufschlüsselung der vier Lagebeziehungen durch einen von den Lernenden zu beschreibenden Algorithmus eine zentrale Rolle, um den Schwerpunkt des Lernvorhabens im Bereich des Argumentierens zu setzen.

Der angebotene Kontext nutzt die Tatsache, dass sich Passagiermaschinen im Sink- bzw. Steigflug über lange Strecken hinweg annähernd auf Geraden bewegen, die für die vorliegende Problematik realistische Beispiele liefern. Dies kann bereits im ersten Unterrichtsvorhaben (Q-GK-G1) einen guten Zugang zum Verständnis der Parametrisierung von Geraden liefern. Hinzu kommt, dass sich aus dem Kontext sofort zwanglos eine Reihe von Fragen ergeben, die eine ganze Unterrichtsreihe tragen. Dazu gehört z. B. die Untersuchung von Kollisionen und Abständen zwischen zwei auf Geraden bewegten Flugobjekten. Die Möglichkeiten, mit realen Daten Modellierungen vorzunehmen, stehen hier nicht im Mittelpunkt, werden aber im Anhang aufgezeigt, um die Bewältigung der dafür nötigen Vorarbeiten zu unterstützen.

Das Unterrichtsbeispiel ist zunächst für einen Grundkurs konzipiert. Die Einteilung in Unterrichtsstunden kann nicht unabhängig vom Leistungsvermögen des Kurses als Einteilung in 45-Minuten-Einheiten verstanden werden. Hier ist im Oberstufenunterricht eine Anpassung machbar. Im Leistungskurs können sich vertiefende Fragestellungen anschließen, bei denen es um die geometrische Rückinterpretation der mithilfe des GTR gewonnenen Informationen geht. Damit ist gemeint, wie sich die Lagebeziehungen der zwei Geraden durch die „Lagebeziehung“ der beiden Richtungsvektoren und eines Verbindungsvektors beschreiben lassen.

## Lehrplanbezug

| **Thema:** *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)* | |
|---|---|
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen**:<br>*Die Schülerinnen und Schüler*<br>• untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […]<br><br>**Prozessbezogene Kompetenzen:**<br><br>**Argumentieren**<br>*Die Schülerinnen und Schüler*<br>• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*)<br>• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (*Begründen*)<br>• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (*Begründen*)<br>• berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (*Begründen*)<br>• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*)<br><br>**Kommunizieren**<br>*Die Schülerinnen und Schüler*<br>• erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (*Rezipieren*)<br>• verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*)<br>• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (*Produzieren*)<br>• erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)<br>• vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*) | *Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.*<br><br>Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an.<br><br>*Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.*<br><br>Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4). |

# Übersicht

### 1. Stunde

| **Phase** | **Verlauf** | **Medien** |
|---|---|---|
| Einstieg in die Reihe und in die Stunde | Stummer Impuls „Kondensstreifen“ und anschauliche Beschreibung von Lagebeziehungen<br>Sammlung von Fragestellungen für die Reihe | 1. Folie |
| Präzisierung des Themas | Konkretisierung des Problems für die Stunde „Zwei Flugzeuge auf dem Radarschirm“ | 2. Folie |
| Organisation der Erarbeitung | Hinwies auf Verwendung kartesischer Koordinaten, ggf. Hinweise zum Rechnereinsatz<br>Bildung von Vierergruppen mit vier unterschiedlichen Datensätzen | 3. Folie |
| erste Erarbeitungsphase | Arbeitsauftrag in Einzelarbeit: Parametrisierung der beiden Flugbahnen und Untersuchung auf Vorliegen eines gemeinsamen (Schnitt)-Punktes<br>alternativ Arbeit in Expertengruppen | Vorgaben Variante 1 bis 4, GTR |
| zweite Erarbeitungsphase | Arbeitsauftrag in Vierergruppen (Prinzip des Gruppenpuzzles): Vergleich der im Rechner dokumentierten Ergebnisse in Hinblick auf die unterschiedlichen Lagebeziehungen | Hilfen, Stifte, GTR |
| Sicherung | Festhalten der vier Lagebeziehungen und der drei Indikatoren zur Feststellung der Lagebeziehungen: Existenz und der Eindeutigkeit eines Schnittpunktes, Kollinearität der Richtungsvektoren | Tafelbild |
| Hausaufgabe | Lösung der Aufgabe mit den Daten aus dem Einstieg | 3. Folie |

**2. Stunde**

| Phase | Verlauf | Medien |
|---|---|---|
| Einstieg und Hausaufgabe | Wiederholung der Lernsituation der Vorstunde<br>Lösung der Hausaufgabe | 3. Folie |
| Präzisierung des Themas | Ziel der Erstellung eines Lernplakates | |
| Organisation der Erarbeitung | Weiterarbeit in den Vierergruppen der Vorstunde | |
| Erarbeitung | Arbeitsauftrag in Vierergruppen: Darstellung der Strategie zur Ermittlung der Lagebeziehung zweier Geraden in einer selbst zu überlegenden Form | Plakate |
| Präsentation | Vorstellung unterschiedlicher Gruppenergebnisse | Plakate |
| Sicherung | Vergleich und ggf. Ergänzung der Darstellungsformen (Flussdiagramm, Tabelle)<br>Dokumentation einer Strategie zur Ermittlung der Lagebeziehung zweier Geraden in einem Flussdiagramm | Plakate, ggf. Tafelbild |
| Hausaufgabe | Anfertigung einer alternativen Darstellung durch Änderung der Reihenfolge der Indikatoren | |

**3. Stunde**

| Phase | Verlauf | Medien |
|---|---|---|
| Einstieg und Hausaufgabe | Abgleich der Hausaufgabe | |
| Präzisierung des Themas | „Wie lässt sich anhand des Gleichungssystems bereits die Lagebeziehung der beiden Geraden feststellen?“ | |
| Organisation der Erarbeitung | Weiterarbeit in Einzelarbeit und anschließend in den Vierergruppen der Vorstunde (Prinzip des Gruppen Puzzles)<br>Hinweise zum Rechnereinsatz (`ref`-Befehl) | |
| erste<br>Erarbeitungsphase | Arbeitsauftrag in Einzelarbeit: Untersuchung der beiden Flugbahnen auf Vorliegen eines gemeinsamen (Schnitt)-Punktes durch Anwendung des `ref`-Befehls auf die darstellende Matrix des zugeordneten linearen Gleichungssystems<br>alternativ Arbeit in Expertengruppen | Arbeitsblätter Variante 1 bis 4, GTR |
| zweite Erarbeitungsphase | Arbeitsauftrag in Vierergruppen: Vergleich der dokumentierten Ergebnisse in Hinblick auf die unterschiedlichen Lagebeziehungen | Arbeitsblätter, GTR |
| Sicherung | Zuordnung der verschiedenen Fälle der normierten Zeilen-Stufen-Form zu den vier Lagebeziehungen | Plakate |
| Hausaufgabe<br>(Übung) | Verteilung der jeweils übrigen drei Arbeitsblätter zur Bearbeitung<br>Zusätzlich Ausgabe eines Komplettsatzes als Folie | Arbeitsblätter und Folien |

# Didaktische Hinweise

## 1. Stunde

### *Zu den Lernvoraussetzungen*

*Stichworte: Parameterdarstellung von Geraden, Lösen von linearen Gleichungssystemen mit dem GTR*

Ein Kontext, bei dem die Parametrisierung von Geraden als gleichförmige Bewegung eines Objektes gedeutet wird, ist den Lernenden bereits bekannt (Q-GK-G1). Es wird vorausgesetzt, dass die Lernenden bereits lineare Gleichungssysteme gelöst und Lösungsmengen gedeutet haben, um z. B. Durchstoßpunkte von Geraden durch Ebenen zu berechnen (Q-GK-G2). Im Einzelnen sind insbesondere folgende inhaltsbezogene Kompetenzen relevant:

*Die Schülerinnen und Schüler*

- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar,
- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Händische Kompetenzen wurden bereits im Zusammenhang mit sogenannten Steckbriefaufgaben in der Analysis (Q-GK-A2) aufgebaut.

*Die Schülerinnen und Schüler*

- beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Im Umgang mit dem GTR benötigen die Lernenden folgende konkrete Erfahrungen:

Der GTR-Befehl `linSolve` reicht aus, um eindeutig lösbare von unlösbaren oder nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystemen zu unterscheiden, also die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu interpretieren (Abbildung 1, unten).

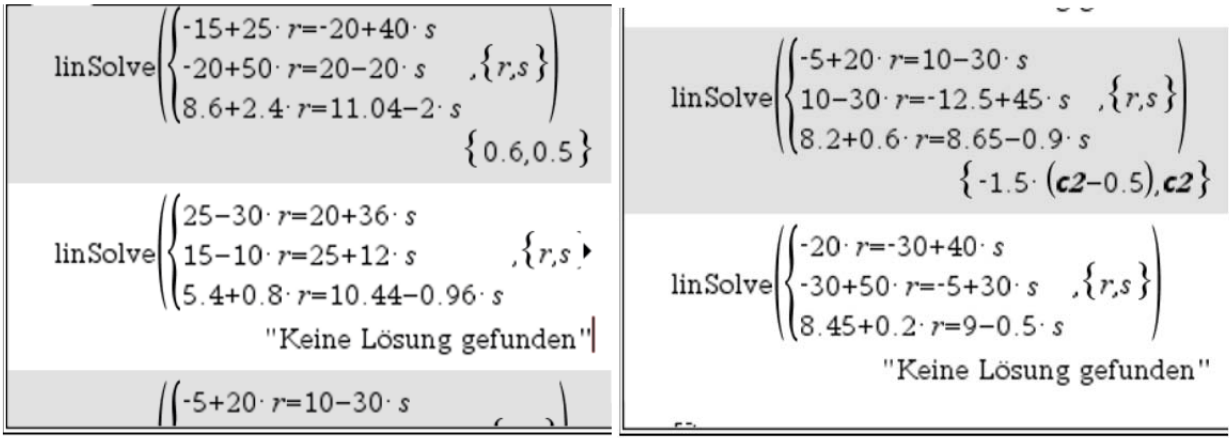



*Abbildung 1: Unterscheiden von eindeutig lösbaren, nicht eindeutig lösbaren und unlösbaren Gleichungssystemen*

### *Zum Einstieg in die Reihe und in die Stunde*

Ein stummer Bildimpuls (1. Folie) regt Fragen an. Dabei soll bereits differenziert werden zwischen den folgenden Fragestellungen:

- Schneiden sich die Bahnen der Flugzeuge, veranschaulicht durch ihre Kondensstreifen?
- Treffen die Flugzeuge selbst aufeinander?
- Unterschreiten die Flugzeuge einen bestimmten Sicherheitsabstand?

Aus praktischer Sicht bedeutet die Überschneidung der Bahnen nur, dass eine zumindest potentiell gefahrenträchtige Situation vorliegt. Als Fragestellungen zur Weiterarbeit können die Frage nach der Kollision und dem Abstand der Flugobjekte sowie dessen Minimum festgehalten werden[1].

Schülerbeiträge, welche die Flughöhe betreffen, können durch die Information unterstützt werden, dass Verkehrsflugzeuge auf Flugebenen unterwegs sind, die durch bestimmte Flughöhen wie z. B. 10.000 Fuß (3048 m) definiert sind[2]. Allerdings sind Steig- und Sinkflug davon natürlich ausgenommen.

Im Sinne einer schülerorientierten Sequenzplanung wird zunächst das Problem der Bahnenschnittpunkte aufgegriffen. Die weiteren Fragen werden für die Folgestunden gesichert. Hierbei muss vereinbart werden, die Bahnen auf einen ausgewählten Punkt des jeweiligen Flugzeuges (z. B. den Schwerpunkt) zu beziehen.

Der Übergang zur Darstellung am Radar[3] (2. Folie) beantwortet die Frage nach einem möglichen Schnittpunkt nicht. Die Lernenden erkennen, dass die Geraden zwar nicht parallel sind, sich aber im Raum (im Unterschied zur Ebene) nicht schneiden müssen. Sie visualisieren die windschiefen Geraden z. B. mit Stiften. Die Daten dieses Einstiegsbeispiels können als Übung z. B. im Rahmen einer Hausaufgabe weiter genutzt werden.

In der Aufgabe werden die Koordinaten der Punkte in der vertrauten kartesischen Form angegeben (3. Folie). An späterer Stelle kann im Rahmen der verfügbaren Zeit vertieft werden, wie man von Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten kommt oder die Flugdaten der Inter-

---

[1] Hier kann in die Reihe eine integrierende Wiederholung von Extrempunktberechnungen eingefügt werden. Es ist allerdings im Grundkurs nötig und im Leistungskurs auch sinnvoll, das Abstandsquadrat zu minimieren, um überflüssige Komplikationen durch die Kettenregel zu vermeiden. Der GTR ermöglicht dabei die Einsicht, dass die Extrempunktberechnung bei einer Hyperbel durch diesen Kunstgriff auf eine Parabel zurückgeführt wird.

[2] Streng genommen handelt es sich um Isobarenflächen. So bezeichnet die sogenannte Flugfläche 100 nur bei Standardbodenluftdruck von 1013,25 hPa die Höhe von 10.000 Fuß.

[3] Eine Radarpeilung, die allein auf der Signalreflexion beruht, liefert naturgemäß ein zweidimensionales Bild der Himmelssphäre, welche üblicherweise durch Breiten- und Längenwinkel koordinatisiert wird. Durch den Dopplereffekt sind jedoch auch Entfernungsmessungen möglich. Tatsächlich werden die Signale durch einen sogenannten Transponder beantwortet, der Daten wie z. B. die Flughöhe oder gleich einen kompletten GPS-Datensatz übermitteln kann. Dies ermöglicht gleichfalls eine Positionsbestimmung.
In der Aufgabe wird eine Darstellung gewählt, welche die Rundumsicht des Towers von oben betrachtet zeigt, wobei nicht die Entfernung, sondern die Höhe unterdrückt ist. Ferner sind bereits kartesische Koordinaten anstelle der üblichen Polarkoordinaten eingeführt worden. Diese didaktischen „Verfremdungen“ dürfen und sollen offengelegt werden.

netseite http://www.flightradar24.com auswertet. Die vorliegende Stunde darf nicht durch einen zusätzlichen Schwerpunkt im Bereich des Modellierens überfrachtet werden, sondern ist an den nachfolgenden Zielen ausgerichtet.

***Zu Lernzielen und zur Methode***

Ziel des Arbeitsauftrages ist es, die im Einstieg entdeckte Tatsache, dass sich nicht-parallele Geraden im Raum im Unterschied zur Ebene nicht notwendig schneiden müssen, weiter zu differenzieren und eine begriffliche Systematik auf einer erkennbaren logischen Grundlage zu erarbeiten. Dies soll nicht abstrakt geschehen, sondern indem die vier möglichen Varianten bei der Lösung des Schnittpunktproblems mit dem GTR exemplarisch entdeckt und miteinander verglichen werden.

Die Einteilung der Lernenden nach den vier Aufgabenvarianten und ihre spätere Zusammensetzung in Vierergruppen folgen der Methode des Gruppenpuzzles. Da die möglichst eigenständige Auseinandersetzung mit dem Problem ebenso wertvoll wie die Kommunikation über die unterschiedlichen Erfahrungen ist, kann die Expertenrunde (zunächst) auch in Einzelarbeit stattfinden. Die Einteilung der vier Fälle ist hier wie folgt:

- Aufgabenvariante 1: sich schneidende Geraden
- Aufgabenvariante 2: echt parallele Geraden
- Aufgabenvariante 3: identische Geraden
- Aufgabenvariante 4: windschiefe Geraden

Damit die Lernenden nicht schon anhand des Radarbildes Rückschlüsse auf ihren Fall ziehen können, erhalten sie für die erste Arbeitsphase lediglich ihren individuellen Datensatz (zwei Messpunkte in kartesischen Koordinaten) ohne Abbildung. Die Aufgabenstellung wird im Plenum an einem eigenen Beispiel mit Abbildung (2. und 3. Folie) vorgestellt, das später als Hausaufgabe genutzt wird.

Als Erstes müssen die Parameterdarstellungen der beiden Flugbahnen bestimmt werden (bzw. die Bewegungsgleichungen der Flugzeuge bei als konstant angenommenem Geschwindigkeitsvektor aufgestellt werden). Dies ermöglicht den Lernenden einen Zugang zur Aufgabe über ein ihnen vertrautes Problem und trägt zur Sicherung von Basiskompetenzen bei.

Im Rahmen einer zum Zweck der Binnendifferenzierung gedachten Zusatzaufgabe wird der Modellierungsaspekt der Aufgabe durchleuchtet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass den Lernenden die Bedeutung des Richtungsvektors als Geschwindigkeitsvektor bereits bekannt ist (Q-GK-G1). Weitergehende Überlegungen können den Neigungswinkel der Flugbahn gegen die Horizontale betreffen.

Der gemeinsame Arbeitsauftrag für die zweite Arbeitsphase kann nur kooperativ erledigt werden. Dabei wird es entscheidend sein, ob der Unterschied zwischen Variante 2 und Variante 4 erkannt wird, die zunächst mit dem gleichen Ergebnis „kein Schnittpunkt“ aus der ersten Phase in die Gruppenarbeit eintreten. Sofern dies nicht gelingt, sind Hilfen notwendig. In einer ersten Erprobung hat sich die Vorlage zum Einzeichnen der Flugbahnen in die Radarbilder bewährt, um Vermutungen hinsichtlich der (Nicht-)Parallelität der Geraden anzuregen (Hilfe A). Es ist auch möglich, diese Hilfe bereits in der ersten Erarbeitungsphase anzubieten. Ergänzend oder alternativ kann ein direkter Hinweis auf die Richtungsvektoren gegeben werden (Hilfe B). Die Wahl der Hilfe sollte am Leistungsstand der Gruppe orientiert sein.

### *Zur Ergebnissicherung*

Die Lernenden sollten ohne große Probleme die Lösungen entsprechend Abb. 1 mit dem GTR ermitteln können. Als Zwischensicherung können diese Screenshots zu Kontrollzwecken ausgelegt werden. Damit kann die zweite Phase von Rechenproblemen und Problemen beim Aufstellen einer Geradengleichung unbelastet starten. Um parallele und windschiefe Geraden zu unterscheiden, müssen die Lernenden entdecken, dass im 2. Fall die Richtungsvektoren kollinear sind, im 4. Fall aber (schon allein an der Vorzeichenkombinationen erkennbar) nicht. Die Untersuchung der Richtungsvektoren ergibt auch, dass im 3. Fall identischer Geraden kollineare Richtungsvektoren auftreten. Die vorgesehenen Hilfen erlauben es, dass das Ziel einer Unterscheidung der vier Lagebeziehungen erreicht wird und die Kollinearität der Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ als Indikator neben der Existenz und Eindeutigkeit eines Schnittpunktes gesichert werden kann. In der Sicherung sollte für den 2. Fall bereits der Begriff „echt parallel“ im Unterschied zu „parallel“ geprägt werden, erst gar keine Begriffsverwirrung aufkommen zu lassen.

## 2. Stunde

### *Zu Lernzielen und zur Methode*

Ausgangspunkt ist das Ergebnis der Vorstunde mit den Indikatoren der Kollinearität der Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ sowie der Existenz und Eindeutigkeit eines Schnittpunktes. Ziel des Arbeitsauftrages ist es nun, die begriffliche Systematik auf eine logische Grundlage zu stellen, indem das strategische Vorgehen zur Entscheidung der Lagebeziehung auf einem Plakat dargestellt wird. Dabei sollen besonders die folgenden Kompetenzen gefördert werden:

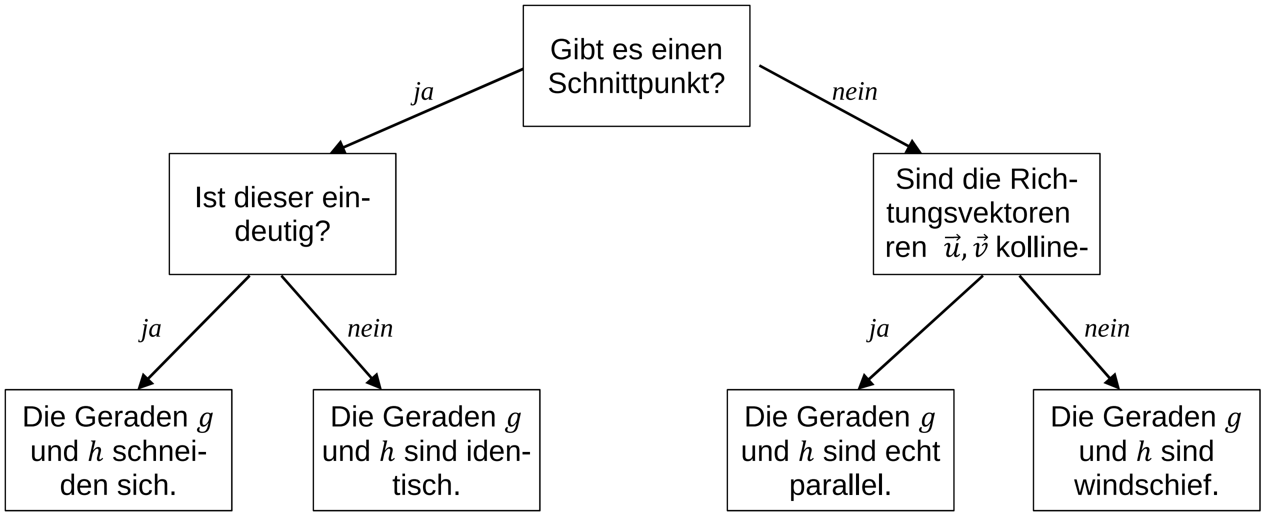
*Die Schülerinnen und Schüler*

- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (*Begründen*)
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (*Produzieren*)
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (*Produzieren*)

Damit die Präsentation der Plakate möglichst viele Impulse zum Vergleichen und Durchdenken logischer Strukturen gibt, wird die Art der Darstellung nicht vorgegeben. Es sind daher sowohl Tabellen als auch Flussdiagramme als Ergebnis zu erwarten, die ggf. überarbeitet werden müssen (vgl. Abbildung 2, Seite 10).

Die Reihenfolge der Indikatoren ist nicht vorgegeben. Es kann vermutet werden, dass der chronologischen Reihenfolge aus der Vorstunde der Vorzug gegeben wird. Das Flussdiagramm kann also auch in umgekehrter Reihenfolge angelegt oder als Tabelle dargestellt werden (mögliche Hausaufgabe). Vertiefend können – insbesondere im Leistungskurs – in den einzelnen Schritten die algebraischen Details mit aufgenommen werden. Schreibt man $g: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v}$, so hat man z. B.:

Gibt es einen Schnittpunkt? Löse $\vec{a} + r\vec{u} = \vec{b} + s\vec{v}$ nach $r$ und $s$.




$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Abbildung 2: Mögliche Sicherung des Entscheidungsdiagramms. Die Matrizen, welche die normierte Zeilen-Stufen-Form anzeigen, werden erst in der nachstehenden 3. Stunde ergänzt.*

## 3. Stunde

### *Zu Lernzielen und zur Methode*

Die vertiefende Deutung der trigonalisierten Matrizen (vgl. Abbildung 3, unten) ist Gegenstand der 3. Unterrichtsstunde. Hierbei sollen die Lernenden ihre Gleichungssysteme in Matrizenform notieren und mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in eine normierte Zeilen-Stufenform umformen. Dabei kann der GTR als wesentliches Hilfsmittel eingesetzt werden. Da davon auszugehen ist, dass die Lernenden hier noch wenig oder gar keine Erfahrungen mitbringen, wird die Arbeit durch Arbeitsblättervorstrukturiert. Erneut ist es sinnvoll, für einen Austausch der Experten zu sorgen, so dass die methodische Anlage der Stunde sich wiederholt und bereits eingespielte Strukturen erneut genutzt werden können.

### *Zum Einsatz des GTR*

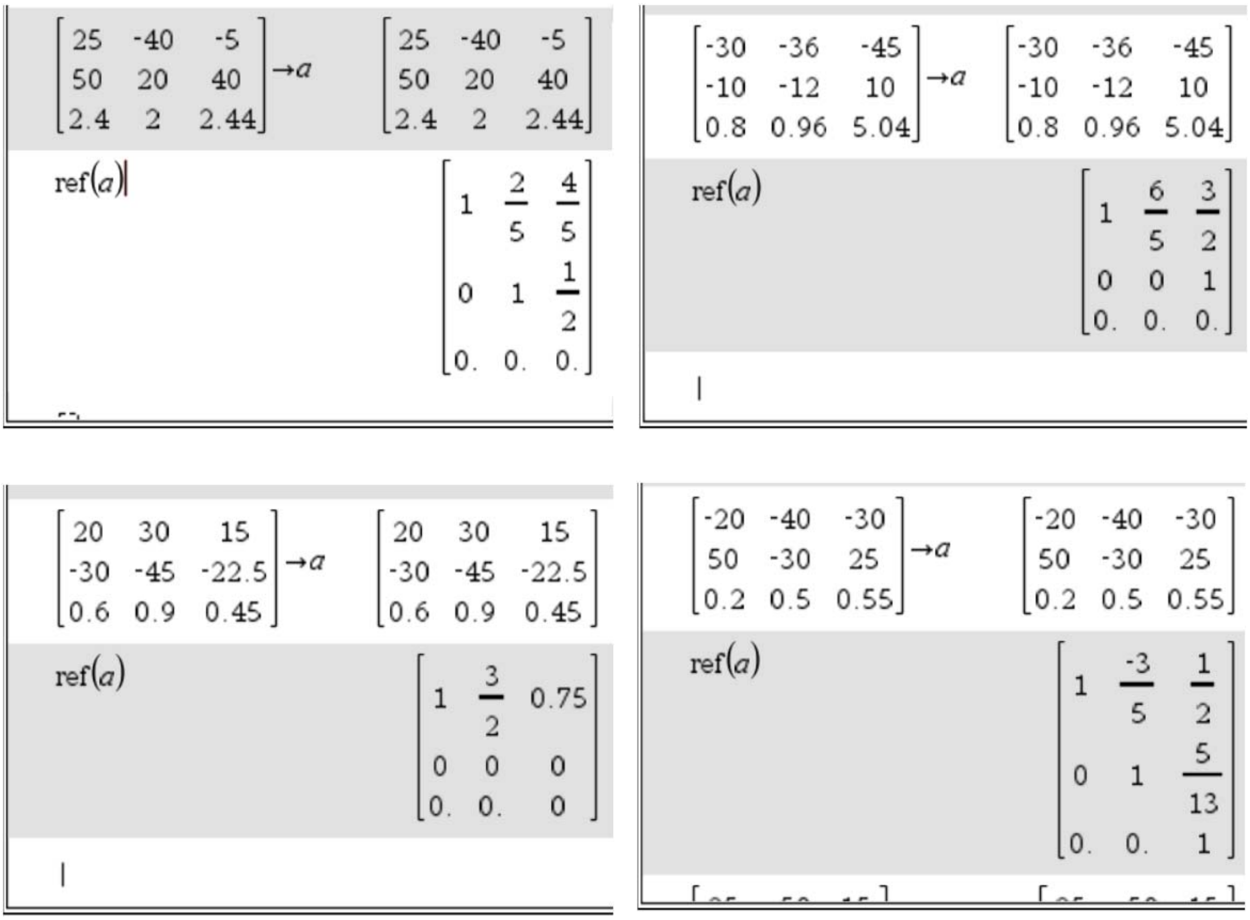



*Abbildung 3: Triagonalisierte Matrizen*

In dieser Stunde benötigt man die Befehle `ref` oder `rref`, die es erlauben, den Gauß-Algorithmus rechnergestützt auszuführen, zu beschreiben und zu verstehen. Dadurch können die Lernenden einen Bezug zu händischen Umformungen herstellen. Allein durch die Umwandlung eines Gleichungssystems in eine normierte Zeilen-Stufen-Form lassen sich die Dimension der Lösungsmenge und sogar die Lageziehung der beiden Geraden erkennen, ohne eine vollständige Lösungsmenge zu berechnen. Im Folgenden wird dem weniger weit gehenden `ref`-Befehl der Vorzug gegeben, da weitergehende Umformungen unnötig sind und sich das ursprüngliche Gleichungssystem bzw. die ursprüngliche Matrix leichter wiedererkennen lässt.

Die erste Spalte gehört zur Variablen $r$, die zweite zu $s$, die dritte zu den Ergebnissen des linearen Gleichungssystems aus drei Gleichungen. Der Reihe nach erkennt man die Fälle der vier Aufgabenvarianten (sich schneidende Geraden, parallele Geraden, identische Geraden, windschiefe Geraden).

Die zur Durchführung und Auswertung nötigen Kompetenzen können im Zusammenhang mit dem vorliegenden Thema erarbeitet werden und müssen nicht schon zuvor erworben sein. Falls Gleichungssysteme händisch gelöst werden sollen, ist neben dem erforderlichen Zeitbedarf zu bedenken, dass Rechenfehler oder uneinheitlich durchgeführte Strategien den eigentlichen Diskussionsprozess behindern können.

***Zur Ergebnissicherung***

In der Sicherung sollen mit Blick auf die Matrizen mit dem Befehl `ref(a)` (vgl. Abbildung 3) folgende Einsichten herausgearbeitet werden:

*Aufgabenvariante 1: sich schneidende Geraden*

Nach der Umformung mittels `ref` kann das Gleichungssystem aus zwei verbliebenen Gleichungen und mit zwei Variablen $r$, $s$ eindeutig gelöst werden. Damit kann der Schnittpunkt bestimmt werden.

*Aufgabenvariante 2: echt parallele Geraden*

Nach der Umformung mittels `ref` verbleibt ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen, das einen Widerspruch enthält. Dies ist die gleiche Situation wie bei zwei parallelen Geraden in der Ebene.

*Aufgabenvariante 3: identische Geraden*

Nach der Umformung mittels `ref` verbleibt eine Gleichung mit zwei Variablen, deren Lösungsmenge eine Gerade beschreibt, welche nur diejenige Gerade sein kann, die hier mit sich selbst zum Schnitt gebracht wurde.

*Aufgabenvariante 4: windschiefe Geraden*

Nach der Umformung mittels `ref` kann das Gleichungssystem aus den beiden ersten Gleichungen mit zwei Variablen eindeutig gelöst werden, d. h. in der $x - y$ – Ebene gibt es einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, wie man ihn auch auf dem Radarbild beobachtet. Die dritte Gleichung enthält jedoch einen Widerspruch, so dass im Raum keine Lösung bzw. kein Schnittpunkt mehr existiert.

***Zur weiteren Vertiefung im Leistungskurs***

Im Leistungskurs ist eine weitergehende Vertiefung möglich, bei der es um die geometrische Rückinterpretation der mithilfe des GTR gewonnenen Informationen geht. Damit ist gemeint, wie sich die Lagebeziehungen der zwei Geraden $g:\vec{x}=\vec{a}+r\vec{u}$ und $h:\vec{x}=\vec{b}+s\vec{v}$ durch die „Lage“ von drei Vektoren, nämlich der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und eines Verbindungsvektors $\vec{a}-\vec{b}$ beschreiben lassen. Im Hintergrund steht dabei ein teilweise heuristischer Begriff von linearer (Un-) Abhängigkeit. Das Ergebnis kann erneut als ein modifiziertes Flussdiagramm dargestellt werden (vgl. Abbildung 4, Seite 13).

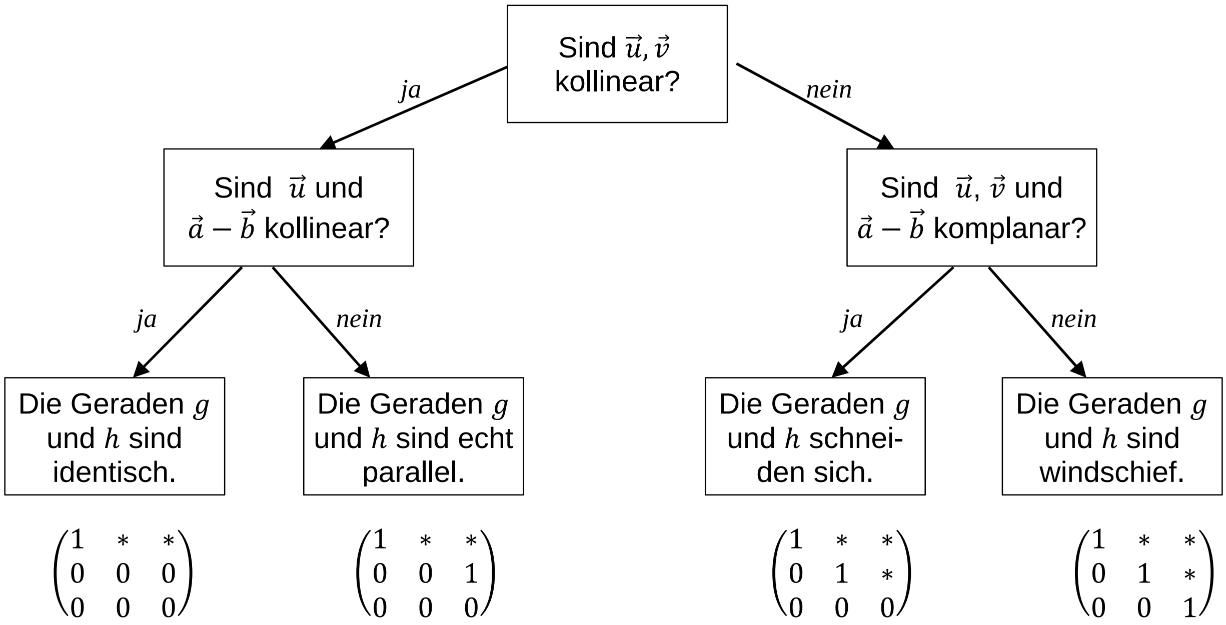



*Abbildung 4: Flussdiagramm zur Lagebeziehung auf Grundlage eines heuristischen Begriffs der linearen Abhängigkeit.*

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde neben den bekannten Begriff der Kollinearität der analoge Begriff der Komplanarität gesetzt, der zumindest in anschaulicher Form leicht eingeführt werden kann.

Folgende Aussagen lassen sich mit Blick auf die normierte Zeilen-Stufen-Form gewinnen:

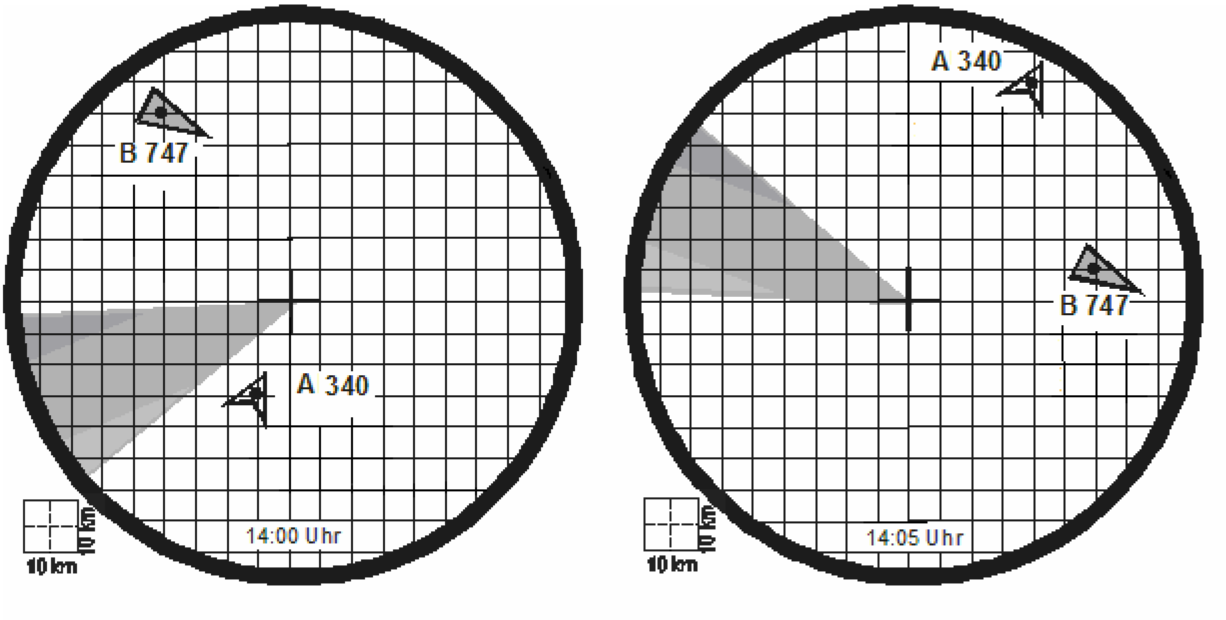
- Wenn die drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a} - \vec{b}$ in einer Ebene liegen, ist die letzte Zeile der Nullvektor, d.h. das Gleichungssystem reduziert sich auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.
- Sind alle drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a} - \vec{b}$ sogar kollinear, so reduziert sich das Gleichungssystem auf eine Zeile.
- Die Lösungsmenge ist genau dann leer, wenn die „widersprüchliche Zeile" $(0 \mid 0 \mid 1)$ auftritt.

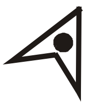
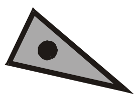
# Unterrichtsmaterial

## Folie 1

**Folie 2**

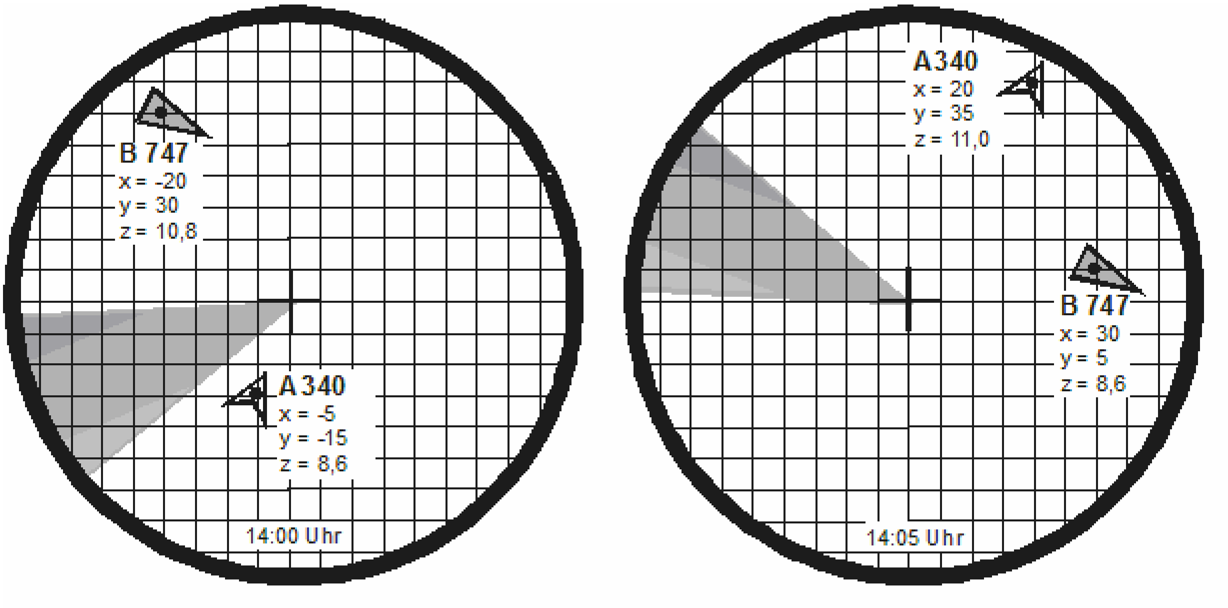
## zwei Flugzeuge auf dem Radarschirm




| | | | |
|---|---|---|---|
|  | A 340: Airbus 340  |  | B 747: Boeing 747  |

**Folie 3**

## Zwei Flugzeuge auf dem Radarschirm




Alle Koordinaten sind in km angegeben. (0|0|0) entspricht dem Fußpunkt des Towers.

***Arbeitsauftrag für die erste Phase***

Untersuchen Sie anhand der vorliegenden Daten rechnerisch, ob die beiden Flugbahnen einen gemeinsamen (Schnitt-) Punkt haben.

Zusatzaufgabe: Überprüfen Sie, wie realistisch die der Aufgabe zugrundeliegenden Angaben für die Beschreibung der Flugbahn eines Passagierflugzeuges sind.

***Arbeitsauftrag für die zweite Phase***

*Das Ziel Ihrer Zusammenarbeit ist es, herauszufinden, worin sich die vier vorgegebenen Situationen unterscheiden.*

Vergleichen Sie die unterschiedlichen Ergebnisse Ihrer Berechnungen miteinander, indem Sie sich kurz gegenseitig Ihren Lösungsweg vorstellen.

Beschreiben Sie mit Hilfe von zwei Stiften genau, wie die Flugbahnen in den unterschiedlichen Fällen zueinander liegen. Dazu müssen Sie Ihre Rechnungen ggf. noch einmal genau untersuchen.

## Arbeitsblatt 1: Aufgabenvarianten

### *Aufgabenvariante 1*

Vorgaben

| | 14:10 Uhr | 14:15 Uhr |
|---|---|---|
| A 340: Airbus 340 | P1(–15\|–20\|8,6) | P2(10\|30\|11) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|20\|11,04) | Q2(20\|0\|9,04) |

### *Aufgabenvariante 2*

Vorgaben

| | 15:25 Uhr | 15:30 Uhr |
|---|---|---|
| A 340: Airbus 340 | P1(25\|15\|5,4) | P2(–5\|5\|6,2) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|–25\|10,44) | Q2(16\|–13\|9,48) |

### *Aufgabenvariante 3*

Vorgaben

| | 18:47 Uhr | 18:52 Uhr |
|---|---|---|
| A 340: Airbus 340 | P1(–5\|10\|8,2) | P2(15\|–20\|8,8) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(10\|–12,5\|8,65) | Q2(–20\|32,5\|7,75) |

### *Aufgabenvariante 4*

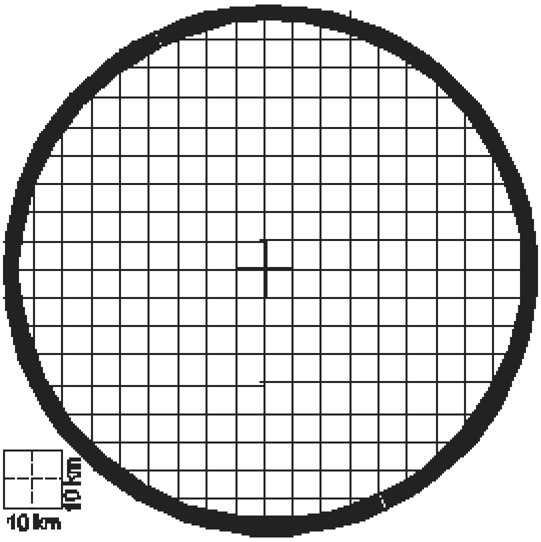
Vorgaben

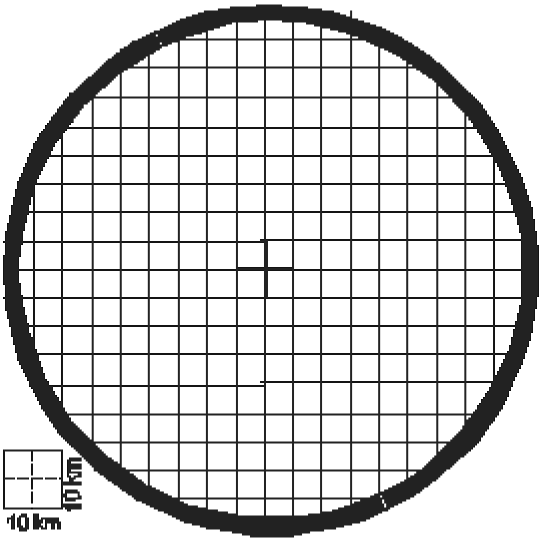
| | 19:50 Uhr | 19:55 Uhr |
|---|---|---|
| A 340: Airbus 340 | P1(0\|–30\|8,45) | P2(–20\|20\|8,65) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–30\|–5\|9) | Q2(10\|25\|8,5) |

**Hilfestellungen für die 1. kooperative Phase**

***Hilfe A***

Tragen Sie die Flugbahnen (speziell zu Gruppe 2 und Gruppe 4) in der Draufsicht (nur $x$- und $y$-Koordinaten) in das Radarbild ein und vergleichen sie die Radarbilder.




***Hilfe B***

Um weitere Unterschiede herauszufinden, vergleichen Sie die Richtungsvektoren der beiden Flugbahnen.

**Arbeitsblätter für die 3. Unterrichtsstunde**

Arbeitsblätter zum Ausdrucken folgen auf den nächsten Seiten.

Von der Schnittpunktberechnung zur Untersuchung der Lagebeziehungen zweier Geraden

***Aufgabenvariante 1***

| | 14:10 Uhr | 14:15 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(–15\|–20\|8,6) | P2(10\|30\|11) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|20\|11,04) | Q2(20\|0\|9,04) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | |
| B 747: Boeing 747 | |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

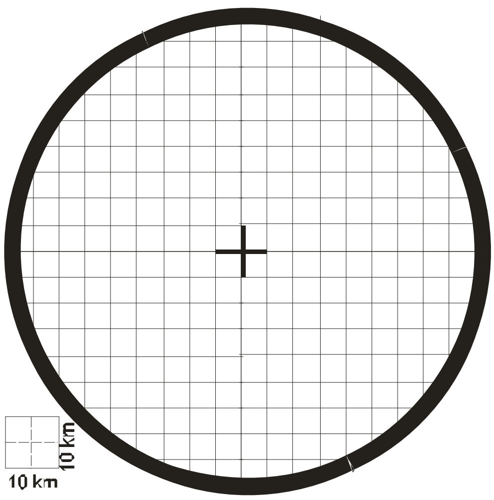
| LGS | Matrix |
|---|---|
| | |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|
| | |

*Fazit:*

Zeichne die beiden Flugbahnen hier in der x-y-Ebene ein




Schnittpunkt?

Was kannst Du über die beiden Richtungsvektoren sagen?

Wie liegen die Geraden zueiander?

***Aufgabenvariante 2***

| | 15:25 Uhr | 15:30 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(25\|15\|5,4) | P2(–5\|5\|6,2) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|–25\|10,44) | Q2(16\|–13\|9,48) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | |
| B 747: Boeing 747 | |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

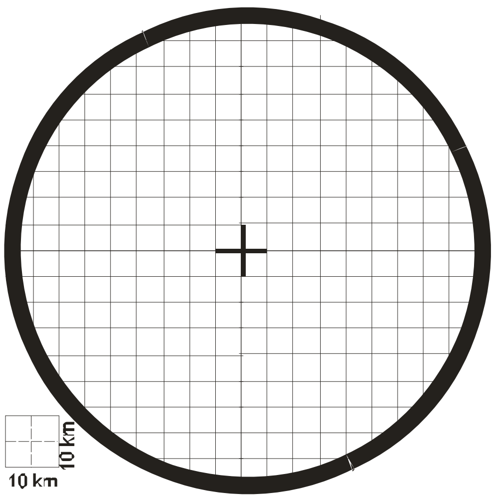
| LGS | | Matrix |
|---|---|---|
| | → | |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|---|
| | ← | |

*Fazit:*

Zeichne die beiden Flugbahnen hier in der x-y-Ebene ein




Schnittpunkt?

Was kannst Du über die beiden Richtungsvektoren sagen?

Wie liegen die Geraden zueiander?

***Aufgabenvariante 3***

| | 18:47 Uhr | 18:52 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(–5\|10\|8,2) | P2(15\|–20\|8,8) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(10\|–12,5\|8,65) | Q2(–20\|32,5\|7,75) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | |
| B 747: Boeing 747 | |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

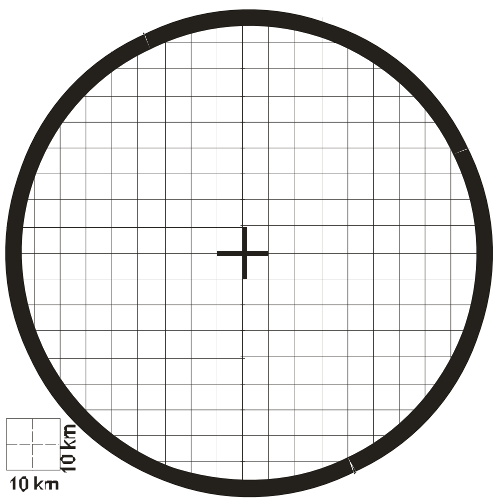
| LGS | Matrix |
|---|---|
| | |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`") und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|
| | |

*Fazit:*

Zeichne die beiden Flugbahnen hier in der x-y-Ebene ein




Schnittpunkt?

Was kannst Du über die beiden Richtungsvektoren sagen?

Wie liegen die Geraden zueiander?

***Aufgabenvariante 4***

| | 19:50 Uhr | 19:55 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(0\|–30\|8,45) | P2(–20\|20\|8,65) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–30\|–5\|9) | Q2(10\|25\|8,5) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | |
| B 747: Boeing 747 | |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

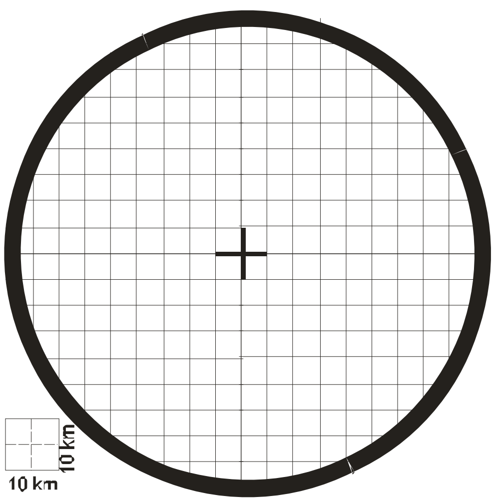
| LGS | | Matrix |
|---|---|---|
| | → | |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|---|
| | ← | |

*Fazit:*

Zeichne die beiden Flugbahnen hier in der x-y-Ebene ein




Schnittpunkt?

Was kannst Du über die beiden Richtungsvektoren sagen?

Wie liegen die Geraden zueiander?

## Lösungen zu den Arbeitsblättern für die 3. Unterrichtsstunde

### *Aufgabenvariante 1*

| | 14:10 Uhr | 14:15 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(–15\|–20\|8,6) | P2(10\|30\|11) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|20\|11,04) | Q2(20\|0\|9,04) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | $\begin{pmatrix}-15\\-20\\8,6\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}10\\30\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-15\\-20\\8,6\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-15\\-20\\8,6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}25\\50\\2,4\end{pmatrix}$ |
| B 747: Boeing 747 | $\begin{pmatrix}-20\\20\\11,04\end{pmatrix}+s\cdot\left[\begin{pmatrix}20\\0\\9,04\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-20\\20\\11,04\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-20\\20\\11,04\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}40\\-20\\-2\end{pmatrix}$ |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

| LGS | Matrix |
|---|---|
| $\begin{aligned}25r-40s &= -20-(-15)\\ 50r+20s &= 20-(-20)\\ 2{,}4r+2s &= 11{,}04-8{,}6\end{aligned}$ | $\left(\begin{array}{cc\|c}25 & -40 & -5\\ 50 & 20 & 40\\ 2{,}4 & 2 & 2{,}44\end{array}\right)$ |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|
| $\begin{aligned}r &= 0{,}6\\ s &= 0{,}5\\ 0 &= 0\end{aligned}$ | $\left(\begin{array}{cc\|c}1 & 0{,}4 & 0{,}8\\ 0 & 1 & 0{,}5\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ |

***Aufgabenvariante 2***

| | 15:25 Uhr | 15:30 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(25\|15\|5,4) | P2(–5\|5\|6,2) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–20\|–25\|10,44) | Q2(16\|–13\|9,48) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | $\begin{pmatrix}25\\15\\5,4\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}-5\\5\\6,2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}25\\15\\5,4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}25\\15\\5,4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-30\\-10\\0,8\end{pmatrix}$ |
| B 747: Boeing 747 | $\begin{pmatrix}-20\\-25\\10,44\end{pmatrix}+s\cdot\left[\begin{pmatrix}16\\-13\\9,48\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-20\\-25\\10,44\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-20\\25\\10,44\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}36\\12\\-0,96\end{pmatrix}$ |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

| LGS | Matrix |
|---|---|
| $\begin{matrix}-30r-36s&=&-20-25\\-10r-12s&=&25-15\\0,8r+0,96s&=&10,44-5,4\end{matrix}$ → | $\left(\begin{array}{cc\|c}-30&-36&-45\\-10&-12&-40\\0,8&0,96&5,04\end{array}\right)$ |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|
| $r+1,2s=1,5$<br>$0=1$<br>$0=0$ ← | $\left(\begin{array}{cc\|c}1&1,2&1,5\\0&0&1\\0&0&0\end{array}\right)$ |

***Aufgabenvariante 3***

| | 18:47 Uhr | 18:52 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(–5\|10\|8,2) | P2(15\|–20\|8,8) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(10\|–12,5\|8,65) | Q2(–20\|32,5\|7,75) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | $\begin{pmatrix}-5\\10\\8,2\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}15\\-20\\8,8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\10\\8,2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-5\\10\\8,2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}20\\-30\\0,6\end{pmatrix}$ |
| B 747: Boeing 747 | $\begin{pmatrix}10\\-12,5\\8,65\end{pmatrix}+s\cdot\left[\begin{pmatrix}-20\\32,5\\7,75\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\-12,5\\8,65\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}10\\-12,5\\8,65\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-30\\45\\-0,9\end{pmatrix}$ |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

| LGS | Matrix |
|---|---|
| $\begin{aligned}20r+30s&=10-(-5)\\-30r-45s&=-12,5-10\\0,6r+0,9s&=8,65-8,2\end{aligned}$ → | $\left(\begin{array}{cc\|c}20&30&15\\-30&-45&-22,5\\0,6&0,9&0,45\end{array}\right)$ |

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

| Rückübersetzung als LGS | Matrix nach `ref`-Befehl |
|---|---|
| $\begin{aligned}r+1,5s&=0,75\\0&=0\\0&=0\end{aligned}$ | ← $\left(\begin{array}{cc\|c}1&1,5&0,75\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$ |

***Aufgabenvariante 4***

| | 19:50 Uhr | 19:55 Uhr |
|---|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | P1(0\|–30\|8,45) | P2(–20\|20\|8,65) |
| B 747: Boeing 747 | Q1(–30\|–5\|9) | Q2(10\|25\|8,5) |

*Geradengleichungen*

| | |
|---|---|
| AB 340: Airbus 340 | $\begin{pmatrix}0\\-30\\8{,}45\end{pmatrix}+r\cdot\left[\begin{pmatrix}-20\\20\\8{,}65\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-30\\8{,}45\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\-30\\8{,}45\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-20\\50\\0{,}2\end{pmatrix}$ |
| B 747: Boeing 747 | $\begin{pmatrix}-30\\-5\\9\end{pmatrix}+s\cdot\left[\begin{pmatrix}10\\25\\8{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-30\\-5\\9\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-30\\-5\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}40\\30\\-0{,}5\end{pmatrix}$ |

*Vereinfachtes Lineares Gleichungssystem (LGS) und Matrix des LGS*

LGS

$$\begin{aligned}-20r-40s &= -30\\ 50r-30s &= -5+30\\ 0{,}2r+0{,}5s &= 9-8{,}45\end{aligned}$$

→

Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c}-20 & -40 & -30\\ 50 & -30 & 25\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}55\end{array}\right)$$

↓

*Matrix in normierter Zeilenstufenform (Befehl: „`ref`“) und als LGS*

Matrix nach `ref`-Befehl

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -0{,}6 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 5/13\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

←

Rückübersetzung als LGS

$$\begin{aligned}&r-0{,}6s=0{,}5\\ &s=5/13\\ &0=1\end{aligned}$$

# Anhang

### Modellierung realer Flugbahnen mit flightradar24:

Zur Auswertung der Flugdaten werden folgende Umrechnungen benötigt:

| | | |
|---|---|---|
| 1 ft | 0,3048 m | feet (Fuß) |
| 1000 fpm | $5{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 18{,}288\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ | feet per minute |
| 1 kt | $1{,}852\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\ \frac{'\mathrm{N}}{\mathrm{h}}$ | Knoten<br>(Seemeilen pro Stunde bzw. Breitenminuten pro Stunde) |
| 1°N | $\frac{10^6}{9}\ \mathrm{m}$ | Breitengrad |
| 1°E | $\cos(\mathbb{B}) \cdot \frac{10^6}{9}\ \mathrm{m}$ | Längengrad, wobei $\mathbb{B}$ der Breitengrad ist. |

### Ein reales Beispiel

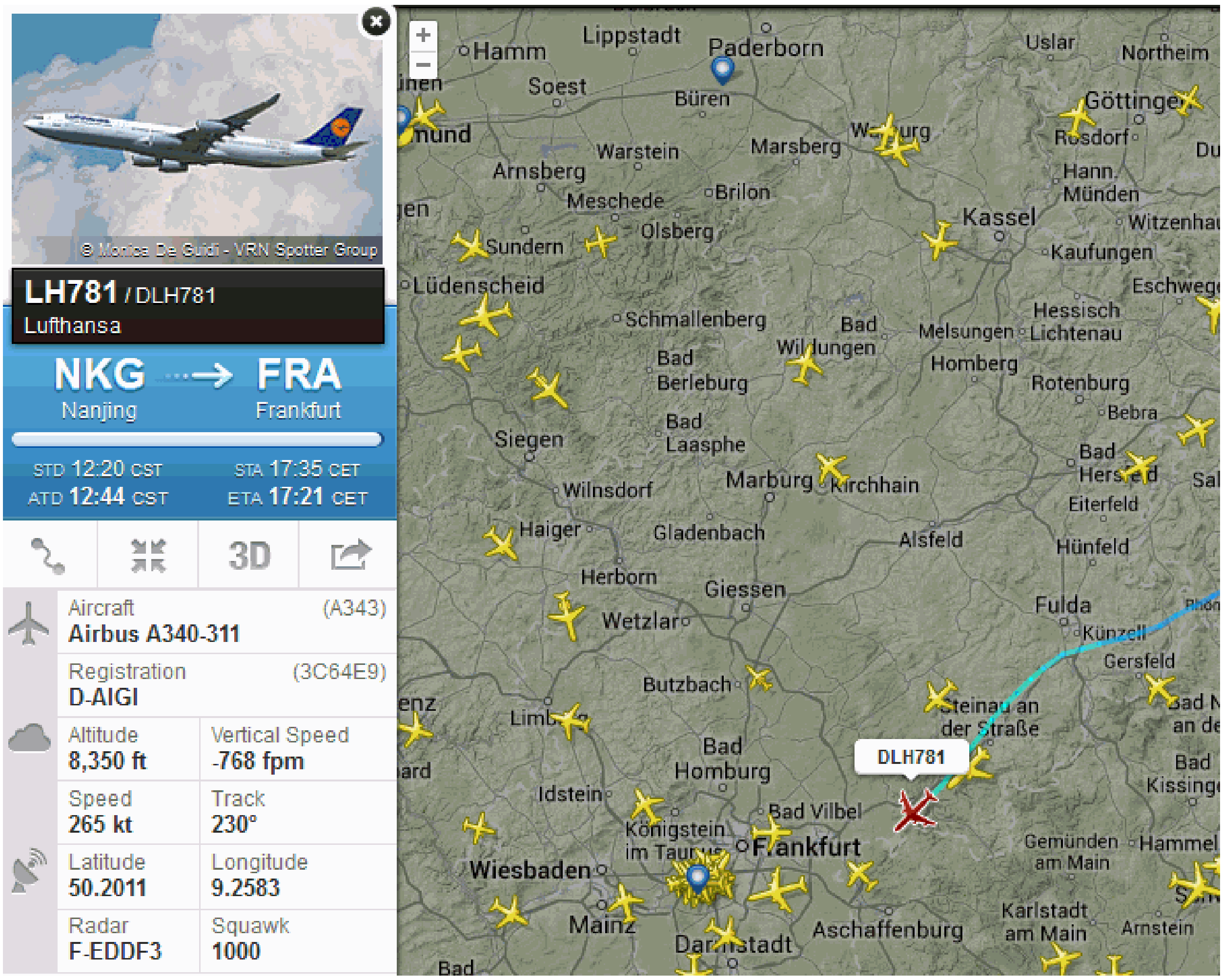



*Abbildung 5: Bildschirmfoto aus flightradar24.com*

Modelliert wird ein gerades Stück (vgl. Abbildung 5, Seite 27) des Landeanflugs auf Frankfurt.

| | | |
|---|---|---|
| Datum: 07.03.2014 | 17:09:57 Uhr | 17:14:57 Uhr |
| AB 340: Airbus 340 | $P_1(46{,}9 \mid 17{,}2 \mid 2{,}44)$ | $P_2(16{,}0 \mid 5{,}0 \mid 0{,}84)$ |

Alle Koordinaten sind in km angegeben. $(0 \mid 0 \mid 0{,}109)$ entspricht dem Fußpunkt in der Mitte des Towers. Im Screenshot aus Abbildung 6 sind die Koordinaten ablesbar.


*Abbildung 6: Tower am Flughafen Frankfurt, Screenshot*

Die den Positionsbestimmungen für $P_1$ und $P_2$ zugrundeliegenden Originaldaten sind in der folgenden Tabelle gelb unterlegt.

| Zeit | Höhe ft | Vertikalgeschw. fpm | Geschw. kt | Track Grad | Breitengrad °N | Längengrad °E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17:09:57 | 8350 | -768 | 265 | 230 | 50,2011 | 9,2583 |
| 17:10:31 | 7775 | -896 | 249 | 254 | 50,1824 | 9,1927 |
| 17:11:06 | 7125 | -1024 | 247 | 248 | 50,1676 | 9,1287 |
| 17:12:03 | 5700 | -1280 | 243 | 251 | 50,1439 | 9,0316 |
| 17:12:38 | 4975 | -1408 | 236 | 252 | 50,1324 | 8,9788 |
| 17:13:21 | 4750 | 256 | 196 | 250 | 50,1177 | 8,9135 |
| 17:14:16 | 4075 | -1024 | 174 | 250 | 50,1037 | 8,8551 |
| 17:14:57 | 3125 | -1536 | 176 | 249 | 50,0917 | 8,8042 |
| 17:15:47 | 2175 | -896 | 169 | 250 | 50,0769 | 8,7413 |
| 17:16:29 | 1600 | -768 | 143 | 250 | 50,0673 | 8,7010 |
| 17:17:02 | 1125 | -640 | 135 | 251 | 50,0590 | 8,6660 |
| 17:17:31 | 825 | -896 | 138 | 250 | 50,0533 | 8,6419 |
| Tower: | 358 | | | | 50,0466 | 8,5716 |

Tabelle 1

Für die Umrechnung werden die angegebenen Formeln benutzt, z. B. für Position $P_1$ :

$x_1$-Koordinate: $\left[9{,}2583 \cdot \cos(50{,}20°) - \mathbf{8{,}5716} \cdot \cos(50{,}05°)\right] \cdot \frac{10^6}{9}\ m = 46{,}9\ km$

$x_2$- Koordinate: $\left(50{,}2011 - \mathbf{50{,}0466}\right) \cdot \frac{10^6}{9}\ m = 17{,}17\ km$

$x_3$ Höhe: $8350\ ft = 8350 \cdot 0{,}3048\ m = 2{,}545\ km$, also $2{,}545\ km - \mathbf{0{,}109\ km} = 2{,}436\ km$

Eine Parametrisierung der Flugbahn ist nun: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 46{,}9 \\ 17{,}2 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -30{,}9 \\ -12{,}2 \\ -1{,}60 \end{pmatrix}$.

Die negativen Vorzeichen weisen auf die Flugrichtung nach Westen, Süden bzw. unten hin. Würde man eine gleichförmige Bewegung über die Zeitdauer von 5 min = 300 s unterstellen, wäre ein Geschwindigkeitsvektor in der Einheit m/s durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} -103 \\ -40{,}7 \\ -5{,}3 \end{pmatrix}$ gegeben und hätte einen Betrag von $110{,}8 \frac{m}{s} = 399 \frac{km}{h}$.

Es ist damit zu rechnen, dass die Vernachlässigung der Erdkrümmung einen Fehler in den Rechnungen in der Größenordnung von 5% verursacht. Die Zuverlässigkeit der Quelldaten kann nicht genau beurteilt werden. Aus den Geschwindigkeitsdaten in Tabelle 1 ergibt sich ein Vergleichswert von $414\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Der vollständige Datensatz für die Bewegung, wie er sich durch Umrechnung aus den Originaldaten ergibt, ist in der folgenden Tabelle verzeichnet.

| Zeit<br>s | Breitengrad | Längengrad | Ost<br>km | Nord<br>km | Höhe<br>km |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50,2011 | 9,2583 | 46,868 | 17,167 | 2,545 |
| 34 | 50,1824 | 9,1927 | 42,459 | 15,089 | 2,370 |
| 69 | 50,1676 | 9,1287 | 38,106 | 13,444 | 2,172 |
| 126 | 50,1439 | 9,0316 | 31,514 | 10,811 | 1,737 |
| 161 | 50,1324 | 8,9788 | 27,908 | 9,533 | 1,516 |
| 204 | 50,1177 | 8,9135 | 23,453 | 7,900 | 1,448 |
| 259 | 50,1037 | 8,8551 | 19,476 | 6,344 | 1,242 |
| 300 | 50,0917 | 8,8042 | 16,006 | 5,011 | 0,953 |
| 350 | 50,0769 | 8,7413 | 11,715 | 3,367 | 0,663 |
| 392 | 50,0673 | 8,701 | 8,965 | 2,300 | 0,488 |
| 425 | 50,0590 | 8,666 | 6,576 | 1,378 | 0,343 |
| 454 | 50,0533 | 8,6419 | 4,930 | 0,744 | 0,251 |
| Tower: | 50,0466 | 8,5716 | 0,000 | 0,000 | 0,109 |

Tabelle 2

Die Vertikalgeschwindigkeiten entsprechen im Mittel den oben angegebenen -5 m/s. Die Fluggeschwindigkeit nimmt von 491 km / h auf 326 km / h ab. Diese Abnahme ist annähernd linear. Bei gleichbleibendem Trend wird die Maschine mit ca. 220 km / h aufsetzen.

## Bildquellen

Abbildung 1 – 4: QUA-LiS.NRW

Folie 2: Boeing 747: „Singapore Airlines Boeing 747-412“, Alex Fotoman, 21.07.2010 um 16:55 Uhr, Lizenz: Namensnennung.

Folie 2: Airbus 340: „First A340-600 prototype doing a flying display at ILA 2006“, Urheber: Juergen Lehle, http://albspotter.eu/, CC-BY-SA

Abbildung 5: Bildschirmfoto aus flightradar24.com

Abbildung 6: Tower am Flughafen Frankfurt, Screenshot von der Internetseite www.google.com, Standort Frankfurt.