

Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

## **Lernaufgaben**

- **Zahlen und Operationen –**  
**„Entdeckerpäckchen“: Beziehungshaltige Plusaufgaben untersuchen**
- **Zahlen und Operationen –**  
**„Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel“**
- **Umgang mit Raum und Form –**  
**Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“**
- **Größen und Messen –**  
**„Preise bei verschiedenen Friseuren vergleichen“**
- **Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten –**  
**„Mögliche Ereignisse eines Zufallsexperimentes bestimmen und untersuchen“**



Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

## **Zahlen und Operationen – „Entdeckerpäckchen“: Beziehungshaltige Plus- aufgaben untersuchen**



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

# I. Übersicht: Mathematik

**Bereich:** Zahlen und Operationen

**Lernaufgabe:** „Entdeckerpäckchen“ –  
Erforschung von beziehungshaltigen  
Aufgabenpäckchen

**Bereich des Faches: Zahlen und Operationen**

**Leitidee:**

Auf der Grundlage tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen sowie verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien ....

Kompetenzerwartung

Kompetenzerwartung



## Forscherauftrag

### Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen; Ausprobieren  
Unterrichtsgespräch

### Sozialform:

Einzelarbeit/Partnerarbeit  
Plenum

### Material:

2 Arbeitsblätter, 1 Blatt mit Tipps zu Aufgabe 1c

### Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler  
verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim  
schnellen Kopfrechnen und beim Zahlenrechnen  
im ZR bis 100  
erkennen Zahlbeziehungen und Zahlenfolgen

## Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (**Problemlösen/kreativ sein**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (**Argumentieren**)
- überprüfen ihre Ergebnisse auf ihre Angemessenheit (**Problemlösen/kreativ sein**)
- verwenden bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe (**Darstellen/Kommunizieren**)

## Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 ... (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen für vorteilhaftes Addieren und Subtrahieren (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen mit eigenen Worten (Zahlvorstellungen) (**Zahlen und Operationen**)

**Inhalt:** Aufgabenserien/Gesetz von der Konstanz der Summe

**Anforderungsbereiche:** Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

**Lernaufgabe/Lernarrangement:** „Entdeckerpäckchen“ – Erforschung von beziehungshaltigen Aufgabenpäckchen

## Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR bis 100 fehlerfrei (AB I)
- setzen beziehungshaltige Aufgabenserien richtig fort und erkennen Fehler aufgrund von aufgedeckten Unregelmäßigkeiten in den Ergebnissen (AB II)
- prüfen Aussagen zum gegensinnigen Verändern von Summanden auf Richtigkeit (AB II)
- nutzen Erkenntnisse über die Zusammenhänge zwischen gegensinnig veränderten Termen und ihren Ergebnissen (Gesetz von der Konstanz der Summe) für die Konstruktion summengleicher Aufgabenserien und geben Tipps zur Vorgehensweise (AB III)

## Übergreifende Kompetenzen:

- Analysieren und Reflektieren:** Schülerinnen und Schüler setzen sich zielgerichtet und systematisch mit strukturierten Aufgabenfolgen auseinander.
- Strukturieren und Darstellen:** Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse bezüglich des Zusammenhangs zwischen strukturierten Aufgabenfolgen und deren Ergebnissen.
- Transferieren und Anwenden:** Schülerinnen und Schüler lernen zu beurteilen, ob sich das Gesetz von der Konstanz der Summe z. B. auch auf Minusaufgaben übertragen lässt.

## Arbeits- und Sozialverhalten:

- Leistungsbereitschaft:** Schülerinnen und Schüler erkennen Schwierigkeiten, holen sich Unterstützung ohne frühzeitig aufzugeben.
- Selbstständigkeit:** Schülerinnen und Schüler arbeiten beim Ausprobieren konzentriert, auch über einen längeren Zeitraum.  
setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein.

## Vertiefung des Wissens:

Erfindung eigener Entdeckerpäckchen zu anderen Vorgaben bezüglich der Ergebnisse

Gesetz von der Konstanz der Differenz bei beziehungshaltigen Serien von Minusaufgaben

## Anwendungszusammenhang:

Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe beim vorteilhaften Rechnen

## Überprüfung der Kompetenzen:

mündliche oder schriftliche Erläuterungen zu einzelnen Überlegungen  
Vorhersage von Ergebnisfolgen bei beziehungshaltigen Rechenpäckchen („Wie muss das nächste Ergebnis heißen? Vermute, ohne die Aufgabe auszurechnen.“)

**Extern:** Vergleichsarbeiten

## II. Aufgabenbeispiel

### Mathematik

**Bereich:** Zahlen und Operationen

**Klasse:** 2/3

**Schwerpunkt:** Zahlenrechnen

**Vorhaben:** Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben untersuchen

**Titel der Lernaufgabe:** „Entdeckerpäckchen“: Beziehungshaltige Plusaufgaben untersuchen

#### Kompetenzen

##### ***Lernvoraussetzungen***

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100
- verfügen über Rechensicherheit beim Zahlenrechnen im ZR bis 100
- erkennen Zahlenfolgen und können diese fortsetzen
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen

##### ***Kompetenzerwartungen***

###### *Prozessbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- erfinden Aufgaben und Fragestellungen (variieren und erfinden) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (begründen) (**Argumentieren**)
- verwenden bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe, mathematische Zeichen und Konventionen (Fachsprache verwenden) (**Darstellen/Kommunizieren**)
- nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern) (**Argumentieren**)

###### *Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:*

Die Schülerinnen und Schüler

- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen (Zahlvorstellungen) (**Zahlen und Operationen**)
- lösen Additionsaufgaben im ZR bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

## **Übergreifende Kompetenzen**

*Analysieren und Reflektieren:* Die Schülerinnen und Schüler setzen sich zielgerichtet und systematisch mit strukturierten Aufgabenfolgen auseinander.

*Strukturieren und Darstellen:* Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse bezüglich des Zusammenhangs zwischen strukturierten Aufgabenfolgen und deren Ergebnissen.

*Transferieren und Anwenden:* Die Schülerinnen und Schüler lernen zu beurteilen, ob sich das Gesetz von der Konstanz der Summe z. B. auch auf Minusaufgaben übertragen lässt.

## **Sachinformation**

„Entdeckerpäckchen“ mit Plusaufgaben bestehen aus kleinen, beziehungshaltigen Serien von zumeist vier bis fünf Rechenaufgaben (strukturierte Aufgabenfolgen), deren Summanden sich in konstanter Weise verändern (gelegentlich bleibt auch einer der beiden Summanden gleich), mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Ergebnisse. Hat man zwei oder drei Aufgaben eines Päckchens berechnet und die regelmäßigen Veränderungen in den Ergebnissen erkannt, werden die nachfolgenden Ergebnisse vorhersagbar. Die weiteren Aufgaben im Päckchen müssen nun (eigentlich) nicht mehr einzeln ausgerechnet werden. Von besonderer Bedeutung sind Päckchen mit Plusaufgaben, deren Summanden sich gegensinnig verändern. Hier bleibt das Ergebnis immer gleich (Konstanz der Summe). Nur wenn die Schülerinnen und Schüler diesen Zusammenhang wirklich verstanden haben, ist er ihnen präsent genug, um ihn in anderen Kontexten für ein vorteilhaftes Berechnen von Aufgaben wie  $67 + 19 = 66 + 20$  (oder:  $67 + 20 - 1$ ) zu nutzen. Ähnliches gilt für beziehungshaltige Rechenpäckchen mit Minusaufgaben.

Leider wird in der Unterrichtspraxis der mathematische Gehalt der beziehungshaltigen Päckchen oft zu wenig thematisiert. Sie werden als „bunte Tupfer“ auf Übungsseiten eingeschoben und dann in Einzelarbeit ebenso routinemäßig „abgearbeitet“ wie die übrigen Aufgaben. Das hat zur Folge, dass die Ergebnisse – ist die entstandene Zahlenfolge einmal erkannt – recht gedankenlos notiert werden, ohne dass die Beziehungen zwischen Aufgaben und Ergebnissen überhaupt in den Blick genommen, besprochen oder veranschaulicht werden.

Die Aufgabenstellungen zu den „Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben“ im Aufgabenbeispiel sollen Anregungen zu einer aktiveren, durchdachteren Auseinandersetzung mit diesem Aufgabentyp geben. Sie beinhalten Anforderungen auf unterschiedlichem Niveau und können dazu beitragen, eine Reihe allgemeiner (prozessbezogener) Kompetenzen zu fördern.

## Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
<b>AB I: Reproduzieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler beherrschen die Grundrechenart Addition und lösen Plusaufgaben im Zahlenraum bis 100 fehlerfrei.
<b>AB II: Zusammenhänge herstellen</b>	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	<p>Die Schülerinnen und Schüler erkennen strukturierte Aufgabenfolgen („Entdeckerpäckchen“) und setzen diese fort. Sie ordnen die vorliegende Beschreibung dem entsprechenden Entdeckerpäckchen zu.</p> <p>Sie erkennen anhand einer „Störung“ innerhalb des Regelmäßes der Ergebnisse eines Entdeckerpäckchens, welche Aufgabe falsch ausgerechnet wurde.</p> <p>Sie vervollständigen ein Entdeckerpäckchen mit dem gleichbleibenden Ergebnis 100.</p> <p>Sie wählen die richtige Aussage zu den Zahlbeziehungen innerhalb eines Entdeckerpäckchens mit immer gleichem Ergebnis aus.</p>
<b>AB III: Verallgemeinern und Reflektieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln aufgrund erkannter Gesetzmäßigkeiten (Gesetz von der Konstanz der Summe) eine Strategie, um gezielt eine strukturierte Aufgabenfolge mit immer gleichem Ergebnis zu bilden. Sie beschreiben diese Strategie verallgemeinernd.

## Ausgestaltung der Lernaufgabe

Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben 

### Aufgabe 1:

a) Rechne die 4 Aufgaben in den Päckchen aus. (AB I)

Einige Päckchen kannst du fortsetzen. Trage dort die 5. Aufgabe ein. (AB II)

A	
12 + 20 =	___
13 + 22 =	___
14 + 24 =	___
15 + 26 =	___
___ + ___ =	___

B	
25 + 30 =	___
35 + 25 =	___
45 + 20 =	___
55 + 15 =	___
___ + ___ =	___

C	
30 + 15 =	___
25 + 15 =	___
20 + 15 =	___
15 + 15 =	___
___ + ___ =	___

D	
22 + 33 =	___
24 + 32 =	___
20 + 35 =	___
21 + 30 =	___
___ + ___ =	___

E	
36 + 14 =	___
33 + 12 =	___
30 + 10 =	___
27 + 8 =	___
___ + ___ =	___

b) Charlotte hat sich eins der Päckchen ausgesucht und es so beschrieben:

**Die erste Zahl wird immer um 5 kleiner.**

Die **zweite Zahl** bleibt immer gleich.

Das **Ergebnis** wird immer um 5 kleiner.

Welches Päckchen ist es? Päckchen \_\_\_ (AB II)

c) Suche dir ein anderes Päckchen aus und beschreibe es. (AB II)

### Aufgabe 2: (AB II)

Ein Ergebnis ist falsch.

Woran kannst du das sehen? Erkläre.

Du brauchst die einzelnen Aufgaben **nicht** alle **nachzurechnen**!

23 + 69 = 92
28 + 62 = 90
33 + 55 = 88
38 + 48 = 86
43 + 41 = 85
48 + 34 = 82

### Aufgabe 3:

- a) Bilde ein Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben, (AB III)  
bei dem das **Ergebnis immer gleich bleibt**.  
Wie kann man ganz einfach ein Plus-Entdeckerpäckchen (AB III)  
**mit immer gleichem Ergebnis** finden?  
Schreibe einen Tipp auf.

! Wichtiger Hinweis: !  
Wenn du kein Entdeckerpäckchen **mit immer gleichem Ergebnis** findest, mache bei Aufgabe 4 weiter.

### Aufgabe 4:

- a) Rechne und setze die Päckchen fort.(AB I)

$$\begin{array}{ll} 30 + 20 = \_ & 55 + 40 = \_ \\ 31 + 19 = \_ & 50 + 45 = \_ \\ 32 + 18 = \_ & 45 + 50 = \_ \\ \_ + \_ = \_ & \_ + \_ = \_ \\ \_ + \_ = \_ & \_ + \_ = \_ \end{array}$$

- b) Mache aus diesem Päckchen ein Entdeckerpäckchen. (AB II)  
Das **Ergebnis** soll **immer gleich** bleiben!

$$\begin{array}{l} 66 + 34 = 100 \\ 68 + \_ = 100 \\ 70 + \_ = \_ \\ 72 + \_ = \_ \\ \_ + \_ = \_ \end{array}$$

Was ist richtig? Kreuze an.  (AB II)

Für das Entdeckerpäckchen **mit immer gleichem Ergebnis** (Aufgabe 4b) gilt:

<input type="checkbox"/>	Wenn die <b>erste Zahl</b> immer <u>um 2 größer wird</u> , dann wird die <b>zweite Zahl</b> immer <u>um 1 kleiner</u> .
<input type="checkbox"/>	Wenn die <b>erste Zahl</b> immer <u>um 2 größer</u> wird, dann wird die <b>zweite Zahl</b> immer <u>um 2 kleiner</u> .
<input type="checkbox"/>	Wenn die <b>erste Zahl</b> immer <u>um 2 größer</u> wird, dann wird die <b>zweite Zahl</b> auch immer <u>um 2 größer</u> .

## Tipp-Karte

Schau dir die einzelnen Aufgaben in den Päckchen immer genau an.

Was passiert immer mit der **ersten Zahl**?

Was passiert immer mit der **zweiten Zahl**?

Was passiert immer mit dem **Ergebnis**?

**Beispiel: Aufgabe 1a**

die erste Zahl		die zweite Zahl		das Ergebnis
12	+	20	=	_____
13	+	22	=	_____
14	+	24	=	_____

Diese Ausdrücke können dir bei der Beschreibung **deines** Päckchens helfen:

wird immer um  
\_\_\_\_\_ größer.

wird immer um  
\_\_\_\_\_ kleiner

bleibt immer gleich

## Erwartete Lernergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler lösen strukturierte Aufgabenfolgen und setzen diese fort.

Sie untersuchen Entdeckerpäckchen und beschreiben sie schriftlich.

Sie ordnen Beschreibungen von Entdeckerpäckchen den entsprechenden Aufgabenfolgen zu.

Sie kontrollieren die Ergebnisse eines Entdeckerpäckchens anhand der Beziehungen zwischen den Ergebniszahlen.

Sie versuchen ein Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis zu finden und halten ihre Vorgehensweise in Form eines Tipps fest. Schülerinnen und Schüler, die zu keiner Lösung kommen, können Hilfen nutzen und aus verschiedenen Aussagen zu den Zahlbeziehungen in einem Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis auswählen.

## Hinweise zum Unterricht

In der Regel kennen die Kinder „Entdeckerpäckchen“. Sie werden in Schulbüchern unterschiedlich bezeichnet, z. B. als „schöne Päckchen“, „starke Päckchen“ oder „super Päckchen“.

Sollte den Kindern dieses Aufgabenformat nicht bekannt sein, kann z. B. zur Einführung an der Tafel die Überschrift „Entdeckerpäckchen“ – unterstützt durch das Logo „Lupe“ (🔍) – notiert und zwei Rechenpäckchen – das eine strukturiert, das andere unstrukturiert – gegenüber gestellt werden. Impuls: „Welches der beiden Päckchen ist wohl ein Entdeckerpäckchen? Warum?“ Die Äußerungen der Kinder können sehr unterschiedlich ausfallen; manche wissen zunächst noch nicht, „wie“ sie schauen müssen, um Zusammenhänge zu erkennen. Als Hilfe können die ersten Summanden, die zweiten Summanden und die Ergebniszahlen jeweils in unterschiedlichen Farben markiert werden. Die Kinder werden unterschiedliche Bezeichnungen für die jeweiligen Positionen und die Veränderungen der Zahlen finden, z. B.: „Die Zahlen da vorne“, „die hinteren Zahlen“, „da kommt immer 2 mehr“, „da wird immer 2 weniger“, „das geht in Zweierschritten“, „das geht nach der Reihe“ usw.

Die Bezeichnungen „erste Zahl“, „zweite Zahl“, „das Ergebnis“, „wird um ... größer/kleiner“, „bleibt gleich“ können als Alternative eingeführt werden.

Die Aufgaben auf den Arbeitsblättern können in Einzel- oder in Partnerarbeit bearbeitet werden. Voraussetzung ist, dass die Kinder über genügend Rechensicherheit verfügen, um die Aufgaben möglichst fehlerfrei zu lösen. Bei fehlerhaften Lösungen können keine Regelmäßigkeiten in den Ergebnissen entdeckt werden.

Zur Lösung der **Aufgabe 1c** können sich die Kinder am Beispiel von Aufgabe 1b orientieren oder sich Anregungen von der Tipp-Karte holen. Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung sollten einzelne Kinder ihre Beschreibung ihren Mitschülerinnen und Mitschülern als weitere „Rätsel“ stellen: „Welches Päckchen habe ich beschrieben?“

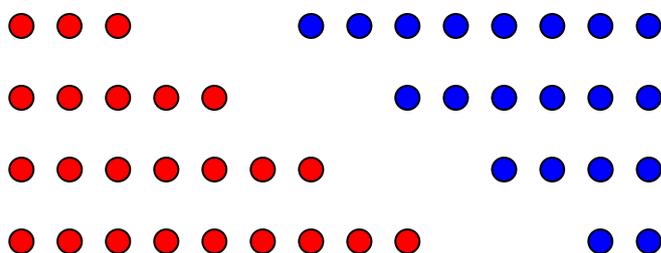
In **Aufgabe 2** wird das Erkennen von Zahlbeziehungen als Ergebniskontrolle genutzt. Die Kinder sollten also die einzelnen Aufgaben möglichst nicht nachrechnen, sondern die Ergebnisse untersuchen: An welcher Stelle wird das regelmäßige Muster in den Ergebnissen unterbrochen? Hier muss fehlerhaft gerechnet worden sein. Die Aufgabe dient dazu, den Kindern diese Form der Ergebniskontrolle in Entdeckerpäckchen bewusst zu machen.

**Aufgabe 3** ist eine komplexe Aufgabenstellung: Die Kinder sollen sich ein Entdeckerpäckchen ausdenken, dessen Ergebnisse eine bestimmte Vorschrift erfüllen müssen. Für manche Kinder ist es hilfreich, ihnen zunächst eine „Startaufgabe“ anzubieten, z. B.  $50 + 30$ . Nicht alle Kinder werden vorausschauend das Gesetz von der Konstanz der Summe anwenden, sondern eher ausprobierend an die Aufgabenlösung herangehen. Erst die selbstständige Formulierung eines Tipps (Aufgabe 3b) kann verdeutlichen, welche Vorgehensweise die Kinder gewählt haben und ob ihnen der mathematische Zusammenhang bewusst ist.

Sollten die Kinder zu keiner Lösung gelangen, können sie mit **Aufgabe 4** eine Lernschleife durchlaufen: Zunächst sollen sie zwei Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis fortsetzen, um sodann in Aufgabe 4b die begonnenen Aufgaben zu einem Päckchen mit dem Ergebnis 100 zu ergänzen. Während für den ersten Summanden die Zahlenfolge leicht fortzusetzen ist, können die zweiten Summanden zunächst durch Ergänzen zur 100 ermittelt und später auch durch das Nutzen der erkannten Regel (immer minus 2) gefunden werden. Bei der Auswahl der richtigen Aussage in Aufgabe 1b können die Kinder zeigen, ob sie den Zusammenhang zwischen der jeweils ersten und zweiten Zahl im Päckchen erkannt haben.

Unter Umständen sollten sich die Kinder das Gesetz von der Konstanz der Summe mit Plättchen veranschaulichen. Dazu wird eine Aufgabe mit kleinen Zahlen gewählt, wie z. B.:

3	+	8	=	11
5	+	—	=	—
7	+	—	=	—
9	+	—	=	—



Es werden immer 2 rote Plättchen hinzugefügt.  
Wie viele blaue Plättchen müssen immer (hinzugefügt oder) weggenommen werden, damit die gleiche Anzahl an Plättchen (hier: 11) erhalten bleibt?

Interessant wäre, ob nun alle Kinder ein eigenes Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis bilden können.

### *Vertiefung des Wissens:*

Zur Vertiefung können sich die Kinder Entdeckerpäckchen mit anderen Vorschriften für das Ergebnis ausdenken, z. B.:

- Das Ergebnis soll immer um 1 größer werden.
- Das Ergebnis soll immer um 2 kleiner werden.

Das Betrachten von Beziehungen zwischen Aufgaben und ihren Ergebnissen wird beim beziehungshaltigen Üben immer wieder an verschiedensten Aufgabenformaten aufgegriffen.

### **Material**

- 2 Arbeitsblätter mit insgesamt 5 Aufgaben
- 1 Tippkarte zu Aufgabe 1c

Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

## **Zahlen und Operationen – „Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel“**



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

# I. Übersicht: Mathematik

**Bereich:** Zahlen und Operationen

**Lernaufgabe:** Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

## Bereich des Faches: Umgang mit Zahlen und Operationen

### Leitidee:

Auf der Grundlage tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen sowie verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien ....

### Kompetenzerwartung

### Kompetenzerwartung

#### Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten) (**Argumentieren**)
- halten Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest (**Darstellen/Kommunizieren**)

#### Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen) (**Zahlenrechnen**) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze (...) bei allen vier Grundrechenarten für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

#### Inhalt:

Strukturen für beziehungshaltiges Rechnen nutzen

**Anforderungsbereiche:** Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

#### Lernaufgabe/Lernarrangement:

Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

#### Vertiefung des Wissens:

Vierersummen an anderen Zahlentafeln

Bestimmung der Summe aller Zahlen des gegebenen 4x4-Quadrates aus der Hundertertafel

#### Anwendungszusammenhang:

aufgabenbezogene Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe beim vorteilhaften Rechnen

Raumorientierung und Raumvorstellung:

Die Schülerinnen und Schüler bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher.

#### Überprüfung der Kompetenzen:

informative Aufgaben (165 + 99)

Variation der Aufgaben (z. B. Summe der Eckzahlen beim 3x3-Quadrat)

Beobachtung einzelner Schülerinnen und Schüler beim Legen der Plättchen  
mündliche Erläuterungen zu einzelnen Überlegungen

### Forscherauftrag

#### Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen, Ausprobieren

#### Sozialform:

Einzelarbeit, Partnerarbeit

#### Medien:

Blatt mit Arbeitsauftrag  
durchsichtige Plättchen  
Vorlage zum Forschen  
Vorlage zum Eintragen gefundener Lösungen

#### Kenntnisse/Fertigkeiten:

verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100 (geben die Zahlensätze des kleinen Einspluseins automatisiert wieder)

lösen Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien

kennen die Struktur der Hundertertafel  
entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen mit eigenen Worten

### Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

finden vier Zahlen mit der Summe 70 probierend (AB I)  
nutzen beim Lösen Zerlegungsstrategien und Zahlbeziehungen (AB II)  
nutzen geometrische Muster beim Ausmalen der Felder für Vermutungen bzgl. weiterer Lösungen (AB II)  
konstruieren weitere Lösungen mithilfe des Gesetzes von der Konstanz der Summe (AB III)  
beschreiben ihre Entdeckungen und Vorgehensweisen (AB III)

### Übergreifende Kompetenzen:

**Strukturieren und Darstellen:** Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung ihre Erkenntnisse bzgl. der Nutzung von Mustern oder gegensinniger Verschiebungen.

### Arbeits- und Sozialverhalten:

**Selbstständigkeit:** Schülerinnen und Schüler arbeiten konzentriert, auch über einen längeren Zeitraum. setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein  
beobachten und reflektieren Lernwege und Lernfortschritte. greifen Beiträge und Vorschläge anderer auf

## II. Aufgabenbeispiel

### Mathematik

**Bereich:** Zahlen und Operationen

**Klasse:** 2/3

**Schwerpunkt:** Zahlenrechnen

**Vorhaben:** Gleiche Summen im 4 x 4-Quadrat an der Hundertertafel suchen

**Titel der Lernaufgabe:** Forscherauftrag zu Vierersummen an der Hundertertafel

#### Kompetenzen

##### **Lernvoraussetzungen**

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Struktur der Hundertertafel
- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100
- verfügen über Rechensicherheit beim Zahlenrechnen im ZR bis 100
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen

##### **Kompetenzerwartungen**

###### *Prozessbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (reflektieren und überprüfen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- Bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern) (**Argumentieren**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (begründen) (**Argumentieren**)

###### *Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:*

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additionsaufgaben im ZR bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

#### **Übergreifende Kompetenzen**

*Strukturieren und Darstellen:* Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung ihre Erkenntnisse bzgl. der Nutzung von Mustern oder gegensinniger Verschiebungen.

## Sachinformation

Erkundungen an der Hundertertafel gehen weit über bloße Orientierungsübungen hinaus. Durch operative Verknüpfungen (insbesondere Addition) des Zahlenmaterials ergeben sich – je nach Lage der verwendeten Zahlen – oft überraschende Rechenmuster, die erforscht werden können. Aufgabenbeziehungen können entdeckt, Gesetzmäßigkeiten erkannt werden.

In der vorliegenden Aufgabenstellung steht das Zahlenmaterial des linken oberen 4 x 4-Quadrats aus der Hundertertafel zur Verfügung. Die Zahlen sind wie in der Hundertertafel angeordnet: Spaltenweise unterscheiden sie sich jeweils um 10, zeilenweise jeweils um 1.

In dem Quadrat sind 4 Zahlen „belegt“, die zusammen die Summe 70 ergeben. Weitere 4 Summanden mit der Summe 70 sollen gefunden werden. Die vier Einer müssen sich immer zu 10 ergänzen, die vier Zehner zu 60. Da keine Zehnerüberschreitung verlangt wird, lassen sich die vier Summanden relativ leicht im Kopf (ggf. mit unterstützenden Zwischennotationen) lösen.

Die regelmäßige Struktur des Zahlenquadrates legt das Nutzen von Gesetzmäßigkeiten nahe: Wenn ein Plättchen um 1 Feld (2, 3 Felder) nach unten (+10, +20, +30) verschoben wird, muss ein anderes Plättchen „als Ausgleich“ um 1 Feld (2, 3 Felder) nach oben (-10, -20, -30) verschoben werden. Ähnliches gilt für Verschiebungen in den Zeilen: nach rechts: +1 (+2, +3), nach links: -1 (-2, -3). Das Gesetz von der Konstanz der Summe kommt hierbei zum Tragen.

Insgesamt gibt es 68 Lösungen. Diese sind in der unteren Zusammenstellung systematisch aufgeführt.

Betrachtet man die verschiedenen Lösungen, kann man erkennen, dass sich einige durch Spiegelungen oder Drehungen aufeinander abbilden lassen, z. B.

1			4
	32	33	

an der waagerechten  
Symmetrieachse gespiegelt

	2	3	
31			34

1			
		13	
		23	
		33	

an der senkrechten  
Symmetrieachse gespiegelt

			4
	12		
	22		
	32		

1			
		13	
		23	
		33	

jeweils  
um 90°  
gedreht

			4
21	22	23	

	2		
	12		
	22		
			34

	12	13	14
31			

Werden diese geometrischen Muster erkannt, können auch geometrische Operationen zur Lösungsfindung genutzt werden. Aus einer Lösung lassen sich zumeist durch Drehung und Spiegelung weitere finden.

## Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
<b>AB I: Reproduzieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler beherrschen die Grundrechenart Addition und lösen Plusaufgaben im Zahlenraum bis 100 fehlerfrei. Sie lösen einzelne Aufgaben probierend und erkennen, ob einzelne Summanden erhöht oder erniedrigt werden müssen.
<b>AB II: Zusammenhänge herstellen</b>	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler nutzen beim Lösen Zerlegungsstrategien und Zahlbeziehungen (z. B.: Alle 4 Einer müssen zusammen 10 ergeben; es dürfen nur höchstens 2 Summanden an der Zehnerstelle eine 3 haben,...). Sie nutzen geometrische Muster für Vermutungen bzgl. weiterer Lösungen und überprüfen diese (z. B.: Wenn die Zahlen in der einen Diagonale 70 ergeben, gilt das evtl. auch für die andere Diagonale).
<b>AB III: Verallgemeinern und Reflektieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln aufgrund erkannter Gesetzmäßigkeiten (Gesetz von der Konstanz der Summe) eine Strategie, um gezielt zu weiteren Lösungen zu gelangen. Sie beschreiben ihre Entdeckungen und Vorgehensweisen.

## Ausgestaltung der Lernaufgabe

### Vierersummen an der Hundertertafel

Britta wählt sich folgendes Zahlenquadrat aus der Hundertertafel aus. Sie legt durchsichtige Plättchen auf die 4 Eckzahlen und addiert sie.

	2	3	
11	12	13	14
21	22	23	24
	32	33	

Als Summe erhält sie 70.

### Forscherauftrag

- Suche andere Möglichkeiten, die Summe 70 mit immer 4 Plättchen zu legen.  
Halte deine Lösungen jeweils so fest:

1			4
31			34

- Hast du beim Forschen entdeckt, wie du viele Lösungen ganz einfach finden kannst?  
Schreibe deine Entdeckungen auf.

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

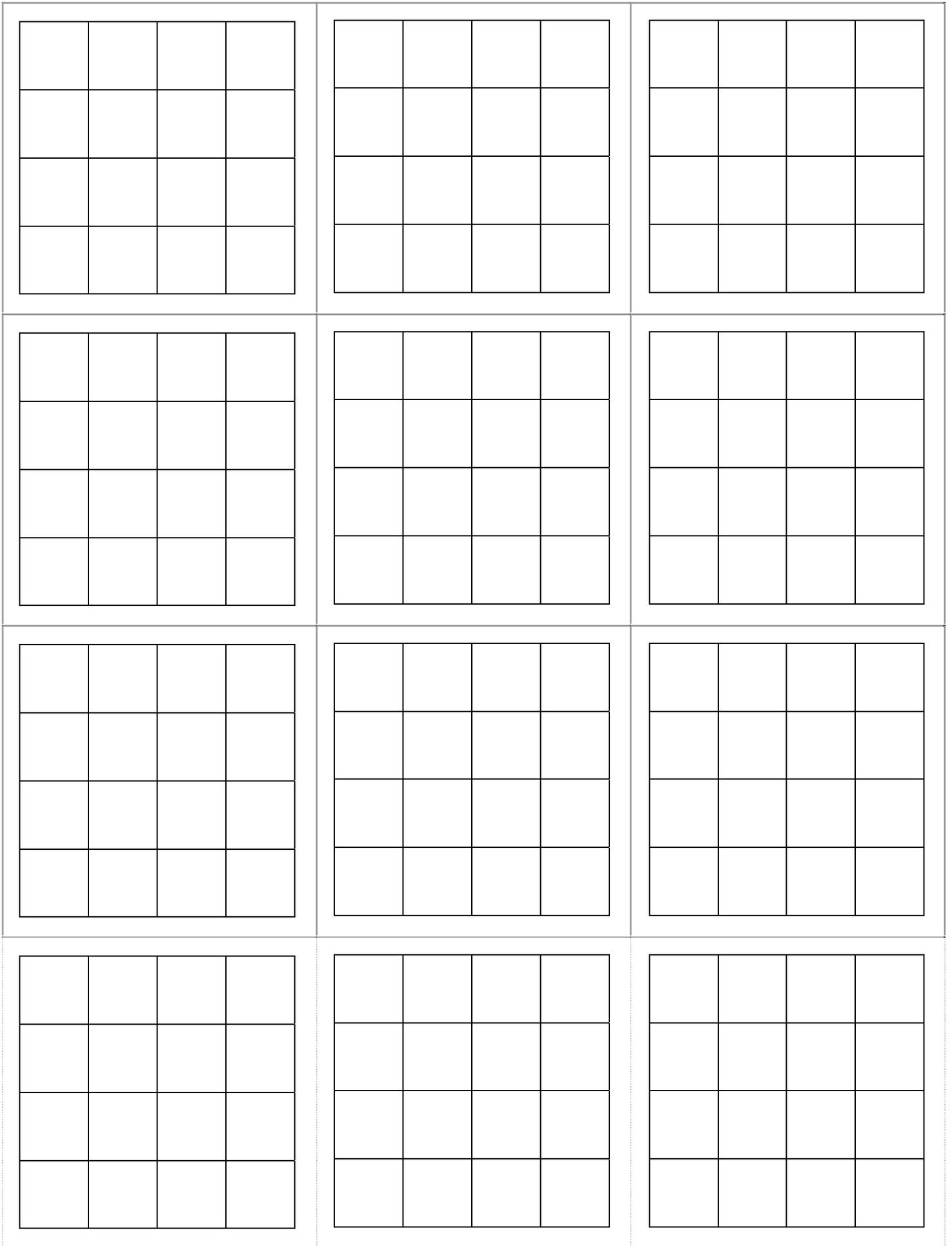
1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34



## **Erwartete Lernergebnisse**

Die Schülerinnen und Schüler bilden aus dem vorgegebenen Zahlenmaterial eines Ausschnitts aus der Hundertertafel Aufgaben mit vier Summanden zur Summe 70. Dabei belegen sie immer die 4 Zahlen der 4 x 4 Zahlentafel mit ihren Plättchen und halten ihre Lösungen in Leerformaten fest. Ggf. sortieren sie ihre Lösungen nach bestimmten geometrischen Mustern.

Während der Lösungssuche entwickeln sie mehr oder weniger systematische, zielgerichtete Vorgehensweisen.

Die Schülerinnen und Schüler tauschen sich über ihre Vorgehensweisen und Entdeckungen aus.

Sie versprachlichen wesentliche Erkenntnisse und nutzen sie ggf. für die Suche nach weiteren möglichen Lösungen.

## **Hinweise zum Unterricht**

Im Rahmen z. B. eines „Forscherauftrags der Woche“, kann das Arbeitsblatt ohne große Vorbereitung ausgeteilt werden. Ggf. kann noch gemeinsam mit den Kindern besprochen werden, was an der Zahlentafel auffällt, um so ein strukturierendes Wahrnehmen anzuregen.

Die Kinder sollten auf jeden Fall angehalten werden, die Plättchen zu benutzen, um damit immer zuerst „probeweise“ mögliche Lösungen zu legen. Diese müssen selbstverständlich immer erst überprüft werden, ehe sie in die einzelnen Leerformate eingetragen werden.

Nicht alle Kinder haben Lust, die vier beschrifteten Lösungsfelder auch immer noch auszumalen; oft reicht es ihnen lediglich die 4 Summanden einzutragen, vor allem dann, wenn sie bereits vorausschauend „mit Zahlenblick“ arbeiten. Das zusätzliche Ausmalen kann vor allem denjenigen Kindern helfen, die noch recht unsystematisch ausprobieren; sie können dadurch angeregt werden, auf geometrische Aspekte (Lagebeziehungen, Spiegelungen) zu achten und ihre Lösungszettel ggf. nach „verwandten“ oder „ähnlichen“ Mustern zu sortieren.

Es sollte den Kindern freigestellt werden, wie viele Lösungen sie finden möchten. Um allerdings eine gezieltere Vorgehensweise zu entwickeln und Zahlbeziehungen oder geometrische Muster zu nutzen, müssen in der Regel mindestens 6 – 8 Aufgaben berechnet werden. Manche Kinder geraten sogar in einen regelrechten „Rausch“, vor allem wenn sie durch gegensinnige Verschiebungen schnell zu immer neuen Lösungen gelangen.

Haben die Kinder diese Strategie erkannt und mündlich benannt und/oder in ihr Lernstagebuch eingetragen, ist das Ziel des vorliegenden Forscherauftrags erreicht.

Ein ausgiebiger Austausch über die individuellen Vorgehensweisen sollte sich auf jeden Fall anschließen, denn nicht alle Kinder werden Zusammenhänge erkannt und Strukturen genutzt haben. Dies kann im Klassenverband oder in der Kleingruppe geschehen. Der Austausch innerhalb der Gruppe sollte strukturiert werden. Hierzu stellen sich die Kinder zunächst nacheinander vor, wie sie vorgegangen sind und was sie dabei herausgefunden haben. Sodann überlegen sie: Welche Vorgehensweisen in der Gruppe sind ähnlich? Um sicherzustellen, dass die einzelnen Kinder die Ideen

ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler verstanden haben, sollten sie diese noch einmal mit eigenen Worten wiederholen.

Insbesondere die Kinder, die die Strategie des gegenseitigen Veränderns einzelner Summanden nicht selbstständig entwickelt bzw. nachvollzogen haben, sollten noch einmal auf konkret-handelnder Ebene Gelegenheit erhalten, durch Verschieben der Plättchen einige weitere Lösungen zu finden. Das Vorgehen kann noch einmal mithilfe von Pfeilen dargestellt, das zugrunde liegende Gesetz von der Konstanz der Summe durch die Notation von Gleichungen verdeutlicht werden.



$$1 + 4 + 31 + 34 = 70$$

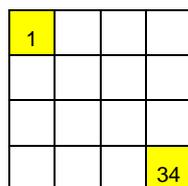
$$2 + 4 + 31 + 33 = 70$$

$$1 + 4 + 31 + 34 = 70$$

$$11 + 4 + 31 + 24 = 70$$

Hinweis zur Differenzierung:

Sollten in der Lerngruppe – z. B. im Rahmen des GUs – einige Kinder mit der Anforderung, vier Zahlen zu addieren, überfordert sein, kann diesen Kindern der Auftrag gegeben werden, lediglich Zweiersummen zu berechnen. Dabei kann von folgendem Ausgangs-Quadrat ausgegangen werden:

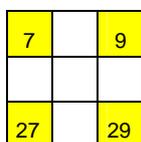


Summe: immer 35

Auch hierbei lassen sich Lage- und Zahlbeziehungen sowie das gegenseitige Verschieben der Plättchen nutzen.

*Vertiefung des Wissens:*

Die Schülerinnen und Schüler können Vierersummen an anderen 4 x 4-Ausschnitten der Hundertertafel berechnen. Denkbar ist hierbei auch ein 3 x 3-Quadrat, bei dem andere geometrische Muster gefunden werden können.



Die Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe kommt bei zahlreichen Aufgabenformaten zum beziehungshaltigen Üben zum Tragen, z. B. bei strukturierteren Aufgabenfolgen („Entdeckerpäckchen“) mit immer gleichem Ergebnis.

## Material

- 1 Arbeitsblatt mit dem Forscherauftrag
- 1 Vorlage zum Forschen; sechs 4 x 4-Quadrate für jeweils 6 Schüler
- 1 Vorlage zum Eintragen gefundener Lösungen  
(Die einzelnen Quadrate sollten ausgeschnitten und den Kindern einzeln zur Verfügung gestellt werden. Dies setzt die Kinder zum einen nicht unter Druck, möglichst auch 12 Lösungen zu finden, zum anderen haben sie die Möglichkeit, ihre Lösungsfelder nach „verwandten“ Mustern zu sortieren.)
- je 4 durchsichtige runde Plättchen pro Kind  
(Sollten keine durchsichtigen Plättchen vorhanden sein, ist es ratsam, aus bunter Folie – z. B. Prospekthüllen – kleine quadratische Felder zuzuschneiden.)

# Anhang

Zusammenstellung aller möglichen Lösungen:

1	2		
		33	34

1		3	
	32		34

1			4
31			34

1			4
	32	33	

1			
11			
			24
			34

1			
	12		
		23	
			34

1			
	12		
			24
		33	

1			
		13	
	22		
			34

1			
		13	
		23	
		33	

1			
		13	
			24
	32		

1			
			14
21			
			34

1			
			14
	22		
		33	

1			
			14
		23	
	32		

1			
			14
			24
31			

1			
	22	23	24

	2	3	
31			34

	2	3	
	32	33	

	2		4
31		33	

	2		
11			
		23	
			34

	2		
11			
			24
		33	

	2		
	12		
	22		
			34

	2		
	12		
		23	
		33	

	2		
	12		
			24
	32		

	2		
		13	
21			
			34

	2		
		13	
	22		
		33	

	2		
		13	
		23	
	32		

	2		
		13	
			24
31			

	2		
			14
21			
		33	

	2		
			14
	22		
	32		

	2		
			14
		23	
31			

	2		
21		23	24

		3	4
31	32		

		3	
11			
	22		
			34

		3	
11			
		23	
		33	

		3	
11			
			24
	32		

		3	
	12		
21			
			34

		3	
	12		
	22		
		33	

		3	
	12		
		23	
	32		

		3	
	12		
			24
31			

		3	
		13	
21			
		33	

		3	
		13	
	22		
	32		

		3	
		13	
		23	
31			

		3	
			14
21			
	32		

		3	
			14
	22		
31			

		3	
21	22		24

			4
11			
21			
			34

			4
11			
	22		
		33	

			4
11			
		23	
	32		

			4
11			
			24
31			

			4
	12		
21			
		33	

			4
	12		
	22		
	32		

			4
	12		
		23	
31			

			4
		13	
21			
	32		

			4
		13	
	22		
31			

			4
			14
21			
31			

			4
21	22	23	

11	12	13	
			34

11	12		14
		33	

11	12		
		23	24

11		13	14
	32		

11		13	
	22		24

11			14
21			24

11			14
	22	23	

	12	13	
21			24

	12	13	
	22	23	

	12	13	14
31			

	12		14
21		23	

		13	14
21	22		

Es gibt 68 Lösungen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

**Raum und Form –  
Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“**



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

# I. Übersicht: Mathematik

**Bereich:** Raum und Form

**Lernaufgabe:** Forscherauftrag „Finde alle zwölf Fünflinge“

## Bereich des Faches: Raum und Form

### Leitidee:

Die Schülerinnen und Schüler ... sammeln durch handelnden Umgang Grunderfahrungen zu Eigenschaften ... von ebenen Figuren ..., zu den Auswirkungen geometrischer Operationen ...

### Kompetenzerwartung

### Kompetenzerwartung

#### Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung. (lösen) (**Problemlösen/keativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an. (vermuten) (**Argumentieren**)

#### Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher (...). (Raumorientierung und Raumvorstellung) (**Raum und Form**)
- stellen ebene Figuren her durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen (...), Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden, Spannen auf dem Geobrett. (Ebene Figuren) (**Raum und Form**)

#### Inhalt:

Pentominos

**Anforderungsbereiche:** Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

#### Lernaufgabe/Lernarrangement:

Forscherauftrag „Finde alle 12 Fünflinge.“

#### Vertiefung des Wissens:

Forscherauftrag: „Aus welchen Fünflingen kann du eine offene Schachtel basteln?“

Forscherauftrag: „Aus welchen der 35 Hexominos kannst du einen Würfel basteln?“

#### Überprüfung der Kompetenzen:

Intern: Beobachtung der Vorgehensweise beim Finden von Pentominos, mündliche Erläuterungen (Gruppengespräch), schriftliche Erläuterungen (Forschertagebuch)

Extern: Vergleichsarbeiten

#### Forscherauftrag

Pentominos

#### Verknüpfung zu anderen Fächern:

#### Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen  
Mathekonzferenz

#### Sozialform:

Einzelarbeit  
Gruppengespräch

#### Material:

Blatt mit Arbeitsauftrag  
Gitterpapier (Kästchengröße: 2,5 cm x 2,5 cm)  
Dose mit 5 Einheitsquadraten, 1 Zwilling, 2 Drillingen und 5 Vierlingen  
Forschertagebuch (bzw. Blätter)

#### Bezüge zur Lebenswirklichkeit:

#### Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Eigenschaften von Quadraten, kennen die Bauregel für Polyominos, kennen alle Polyominos, die sich aus 2, 3 und 4 kongruenten Quadraten legen lassen, kennen den Begriff „deckungsgleich“, wissen, wie ebene Figuren auf Kongruenz überprüft werden können.

#### Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

finden alle 12 Lösungen, indem sie Pentominos probierend legen, auf Kongruenz überprüfen und noch fehlende unter Anleitung herstellen (AB I).

nutzen die Möglichkeit, durch systematisches Variieren Pentominos zu finden, und ergänzen noch fehlende unter Anleitung (AB II).

finden durch konsequent systematisches Variieren alle Pentominos und stellen ihre Systematik strukturiert dar (AB III).

#### Übergreifende Kompetenzen:

**Analysieren und Reflektieren:** Die Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen. Zur erfolgreichen Bearbeitung werden Vorwissen, Vermutungen und Vergleiche ebenso herangezogen wie fachbezogene und fächerübergreifende Zugänge und Verfahren.

**Strukturieren und Darstellen:** Die Schülerinnen und Schüler sind fähig, aus der Auseinandersetzung mit einem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse zu formulieren und diese angemessen festzuhalten.

#### Arbeits- und Sozialverhalten:

**Selbstständigkeit:** Die Schülerinnen und Schüler setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein.

**Leistungsbereitschaft:** Die Schülerinnen und Schüler erkennen Schwierigkeiten, fragen nach, holen sich Unterstützung ohne frühzeitig aufzugeben.

## II. Aufgabenbeispiel

### Mathematik

**Bereich:** Raum und Form  
**Schwerpunkt:** Ebene Figuren  
**Vorhaben:** Pentominos

**Klasse:** 3

**Titel der Lernaufgabe: Forscherauftrag: „Finde alle 12 Fünflinge“**

#### Kompetenzen

##### **Lernvoraussetzungen**

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Eigenschaften von Quadraten
- kennen die Bauregel für Polyominos
- kennen alle möglichen Polyominos, die sich aus 2, 3 und 4 kongruenten Quadraten legen lassen
- kennen den Begriff „deckungsgleich“
- wissen, wie ebene Figuren auf Kongruenz überprüft werden können

##### **Kompetenzerwartungen**

###### *Prozessbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen). (**Problemlösen/kreativ sein**)
- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten). (**Argumentieren**)

###### *Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:*

Die Schülerinnen und Schüler

- bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher (...). (Raumorientierung und Raumvorstellung) (**Raum und Form**)
- stellen ebene Figuren her durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen (...), Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden, Spannen auf dem Geobrett. (Ebene Figuren) (**Raum und Form**)

#### **Übergreifende Kompetenzen**

*Analysieren und Reflektieren:* Die Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen. Zur erfolgreichen Bearbeitung werden Vorwissen, Vermutungen und Vergleiche ebenso herangezogen wie fachbezogene und fächerübergreifende Zugänge und Verfahren.

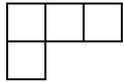
*Strukturieren und Darstellen:* Die Schülerinnen und Schüler sind fähig, aus der Auseinandersetzung mit einem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse zu formulieren und diese angemessen festzuhalten.

## Sachinformation

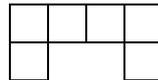
Pentominos (auch „Quadratfünflinge“ genannt) sind Quadratmehrlinge, die aus fünf kongruenten Quadraten bestehen. Sie gehören damit zu den sog. Polyominos (n-Minos).

Ein n-Mino entsteht, indem n kongruente Quadrate so aneinandergesetzt werden, dass je zwei benachbarte Quadrate eine gemeinsame Seite haben.

*Beispiele für Polyominos:*

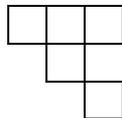
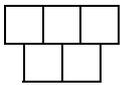


ein Tetromino (Vierling)

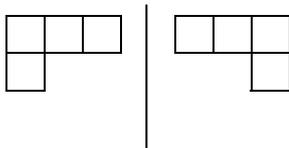


ein Hexomino (Sechsling)

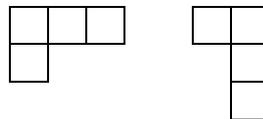
*Gegenbeispiele:*



Bei der Bestimmung der Anzahl der möglichen n-Minos werden nur alle nicht deckungsgleichen n-Minos mitgezählt. Nicht mitgezählt werden also gespiegelte oder gedrehte Figuren.



gespiegelt



gedreht

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl  $A(n)$  der kongruenten n-Minos ( $n=1, \dots, 7$ ), die sich aus n kongruenten Quadraten bilden lassen:

n	$A(n)$	Name
2	1	Domino
3	2	Triomino
4	5	Tetromino
<b>5</b>	<b>12</b>	<b>Pentomino</b>
6	35	Hexomino
7	708	Heptomino

## Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
<b>AB I: Reproduzieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler finden alle 12 Lösungen, indem sie Pentominos probierend legen, auf Kongruenz überprüfen und noch fehlende unter Anleitung herstellen.
<b>AB II: Zusammenhänge herstellen</b>	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Möglichkeit, durch systematisches Variieren Pentominos zu finden, und ergänzen noch fehlende unter Anleitung.
<b>AB III: Verallgemeinern und Reflektieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler finden durch konsequent systematisches Variieren alle Pentominos und stellen ihre Systematik strukturiert dar.

## Ausgestaltung der Lernaufgabe

**Forscherauftrag:**

**„Finde alle 12 Fünflinge“**

**Material:**

- Dose mit 5 Quadraten, 1 Zwilling, 2 Drillingen und 5 Vierlingen
- Gitterpapier

**Gehe so vor:**

1. Wenn du einen Fünfling gefunden hast, stelle ihn mit Hilfe des Gitterpapiers her.
2. Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

### Hast du alle 12 Fünflinge gefunden?

⇒ Sortiere alle Fünflinge und zeichne sie so in dein Forschertagebuch.

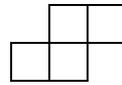
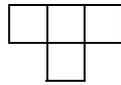
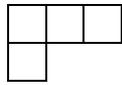
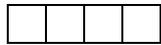
### Brauchst du Hilfe, weil dir noch Fünflinge fehlen?

⇒ Lass dir eine Tippkarte geben.

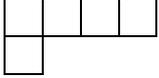
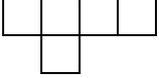
**Gitterpapier**


## Tippkarte 1: „Aus Vierlingen werden Fünflinge“

Nimm aus der Dose die 5 Vierlinge.

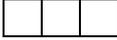


Lass um jeden Vierling ein Quadrat wandern.

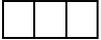
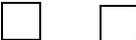
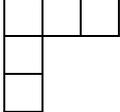
Aus  wird  , dann  ...  


Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

## Tippkarte 2: „Die längste Reihe“

Die längste Reihe des Fünflings besteht aus <b>fünf</b> Quadraten.		Es gibt <b>1 Lösung</b> .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus <b>vier</b> Quadraten.		Es gibt <b>2 Lösungen</b> .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus <b>drei</b> Quadraten.		Es gibt <b>8 Lösungen</b> .
Die längste Reihe des Fünflings besteht aus <b>zwei</b> Quadraten.		Es gibt <b>1 Lösung</b> .

Nimm die fehlende Anzahl an Quadraten und ergänze zu einem Fünfling.

Aus   zum Beispiel: 

Überprüfe immer, ob du nicht schon einen deckungsgleichen Fünfling gefunden hast.

## **Erwartete Lernergebnisse**

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten den Forscherauftrag selbstständig in Einzelarbeit.

Sie nutzen dabei die Möglichkeit, auf verschiedenen Darstellungsebenen zu arbeiten: Sie können Fünflinge finden, indem sie sie erst legen (mit den 5 einzelnen Quadraten oder durch passendes Ergänzen von Zwillingen, Drillingen oder Vierlingen) und dann mit Gitterpapier herstellen. Sie können aber auch, weil sie zum mentalen visuellen Operieren in der Lage sind, auf das Legen verzichten.

Sie können rein probierend Fünflinge zu finden versuchen, aber auch bei ihrer Suche nach Fünflingen systematisch vorgehen.

## **Hinweise zum Unterricht**

In der Schuleingangsphase stellen die Schülerinnen und Schüler ebene Figuren durch Legen, Nach- und Auslegen, Zerlegen und Zusammensetzen, Fortsetzen, Vervollständigen, Umformen, Falten, Ausschneiden oder Spannen auf dem Geobrett her.

Der Erwerb dieser Kompetenz ist damit jedoch nicht abgeschlossen. In einen komplexeren Handlungszusammenhang gestellt wird diese Kompetenz auch in den Klassen 3 und 4 weiter vertieft.

Wenn die Schülerinnen und Schüler am Forscherauftrag „Finde alle 12 Fünflinge“ arbeiten, können sie nicht nur konkret handelnd die 12 Fünflinge finden und auf Kongruenz überprüfen, sondern auch mental visuell operierend vorgehen, z. B. indem sie ein Quadrat um einen Vierling in der Vorstellung wandern lassen und auf diese Weise weitere Fünflinge finden und gefundene Fünflinge in der Vorstellung auf Kongruenz überprüfen.

Insofern ist der vorliegende Forscherauftrag für die Klasse 3 vorgesehen.

Es sind verschiedene Möglichkeiten denkbar, wie sich Schülerinnen und Schüler im Unterricht aktiv entdeckend mit Pentominos beschäftigen können. Eine Möglichkeit wird nachfolgend kurz skizziert.

Um den Forscherauftrag erfolgreich bewältigen können, sollten zuvor folgende Unterrichtssequenzen vorangegangen sein:

Die Schülerinnen und Schüler

- lernen die Bauregel für Quadratmehrlinge kennen,
- lernen den Begriff „deckungsgleich“ kennen,
- erfahren, dass deckungsgleiche Lösungen als nicht verschieden anzusehen sind und wie Quadratmehrlinge auf Deckungsgleichheit überprüft werden können (durch Drehung und/oder Spiegelung),
- bearbeiten den Forscherauftrag „Finde alle Zwillinge, Drillinge und Vierlinge“,
- erstellen ein Plakat, auf dem alle gefundenen Quadratmehrlinge aus 2, 3 und 4 Quadraten geordnet festgehalten werden. Ein Beispiel für ein solches Plakat findet sich in diesem Material.

Das Plakat birgt Anregungen, wie die 12 Fünflinge nicht (nur) probierend, sondern strategisch vorgehend gefunden werden können:

- Einerseits kann man ein Quadrat systematisch um die fünf Vierlinge wandern lassen. Bereits gefundene deckungsgleiche Fünflinge bleiben unberücksichtigt (**Strategie 1**). Aufgrund der vorangegangenen Unterrichtssequenzen werden die Schülerinnen und Schüler diese Strategie am ehesten verfolgen.
- Andererseits kann man die 12 Fünflinge ermitteln, indem man von 5 (4, 3, 2) Quadraten in einer Reihe als der jeweils längsten Reihe ausgeht und die jeweils fehlende Anzahl an Quadraten (systematisch vorgehend) ergänzt (**Strategie 2**). Bei Strategie 2 müssen also zunehmend mehr Quadrate passend ergänzt werden (erst 0 Quadrate, dann 1 Quadrat, dann 2 Quadrate und schließlich 3 Quadrate), um einen Fünfling zu erhalten. Da es nicht leicht ist, alle 8 möglichen Fünflinge zu finden, wenn die längste Reihe aus 3 Quadraten besteht, wählen Schülerinnen und Schüler diese Strategie von sich aus erfahrungsgemäß nur relativ selten.

Um Schülerinnen und Schülern,

- die entweder rein probierend vorgehen, Anregung zu geben, wie sie beim Finden strategisch vorgehen können, oder
- die nicht alle Fünflinge finden können, Hilfe anbieten zu können, gibt es zwei Tippkarten.

Tippkarte 1 sollte an die Schülerinnen und Schüler gegeben werden, die rein probierend vorgehen.

Bei Schülerinnen und Schülern, die noch nicht alle 12 Fünflinge gefunden haben, sollte Tippkarte 1 den leistungsschwächeren zugewiesen werden, den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern kann man die Wahl überlassen.

Nach Abschluss der Arbeitsphase ist es wichtig, den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu geben, sich in Kleingruppen oder im Klassengespräch über ihre Lernwege auszutauschen.

*Vertiefung des Wissens:*

Die folgenden beiden Forscheraufträge tragen dazu bei, die Fähigkeit zum mentalen visuellen Operieren weiter zu vertiefen:

- Forscherauftrag 1: „Aus welchen Fünflingen kannst du eine offene Schachtel basteln?“ (z. B. als Partnerarbeit)
- Forscherauftrag 2: „Aus welchen der 35 Hexominos kannst du einen Würfel basteln?“ (z. B. als Gruppenarbeit)

Auf den Arbeitsblättern (Forscherauftrag 1 bzw. Forscherauftrag 2) können die Schülerinnen und Schüler nicht nur die passende Antwort ankreuzen, sondern auch, wie sie die Antwort jeweils gefunden haben, ob konkret handelnd (basteln) oder durch mentales visuelles Operieren (nachdenken).

Für das konkret handelnde Lösen (Basteln der Schachteln bzw. Würfel) stehen die Arbeitsblätter (Forschungsauftrag 1) und Materialien im Anhang zur Verfügung.

## Material

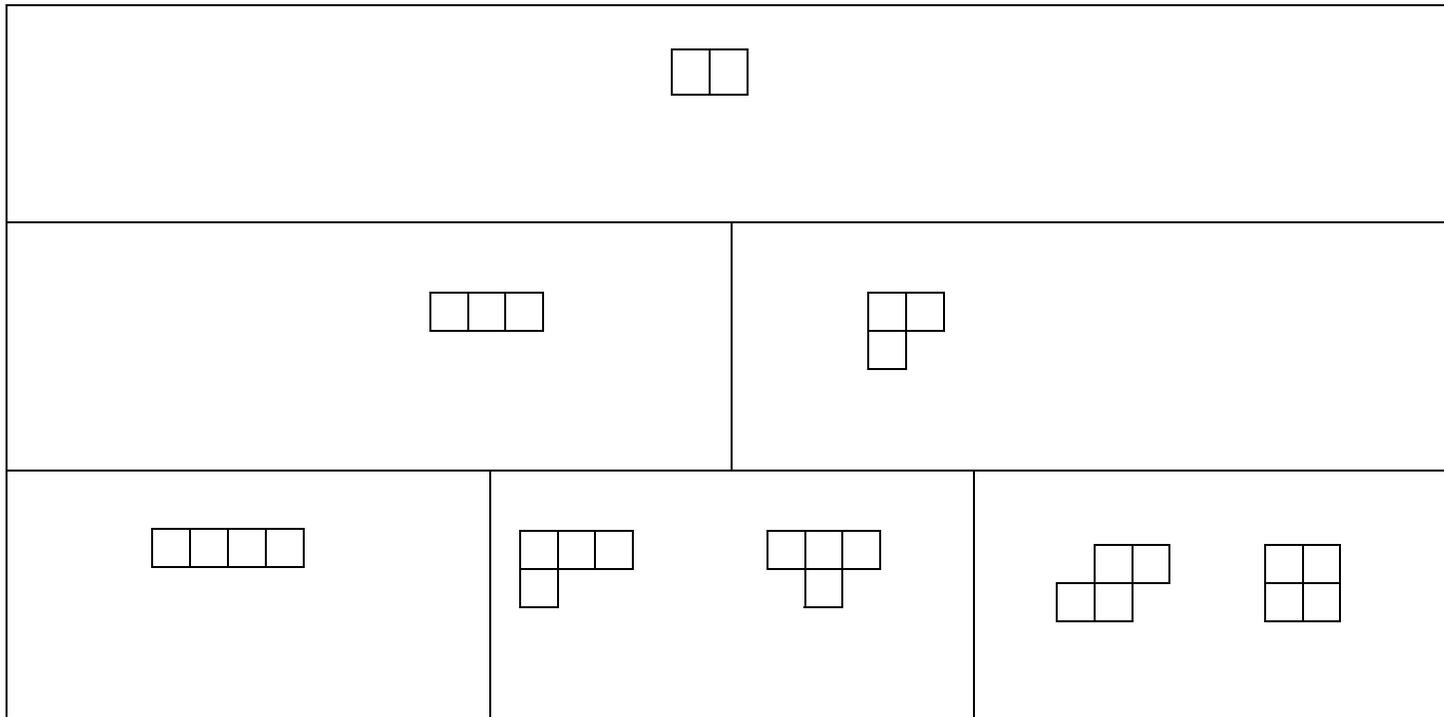
- **Forscherauftrag als Kopiervorlage**
- **Gitterpapier** zum Ausschneiden der 5 Quadrate und zum Ausschneiden der gefundenen Zwillinge, Drillinge, Vierlinge und Fünflinge **als Kopiervorlage**

### Hinweis:

Um den Schülerinnen und Schülern die Überprüfung auf Kongruenz zu erleichtern, sollten die Trennlinien zwischen den Quadraten auf der Vor- und Rückseite der Quadratmehrlinge zu sehen sein. Dies kann entweder dadurch erreicht werden, dass Kopien mit bedruckter Vor- und Rückseite angefertigt werden, oder indem die Schülerinnen und Schüler gebeten werden, die durchscheinenden Trennlinien zwischen den Quadraten nach dem Ausschneiden auf der Rückseite nachzuzeichnen.

- **Tippkarten 1 und 2 als Kopiervorlagen**

# Quadratmehrlinge



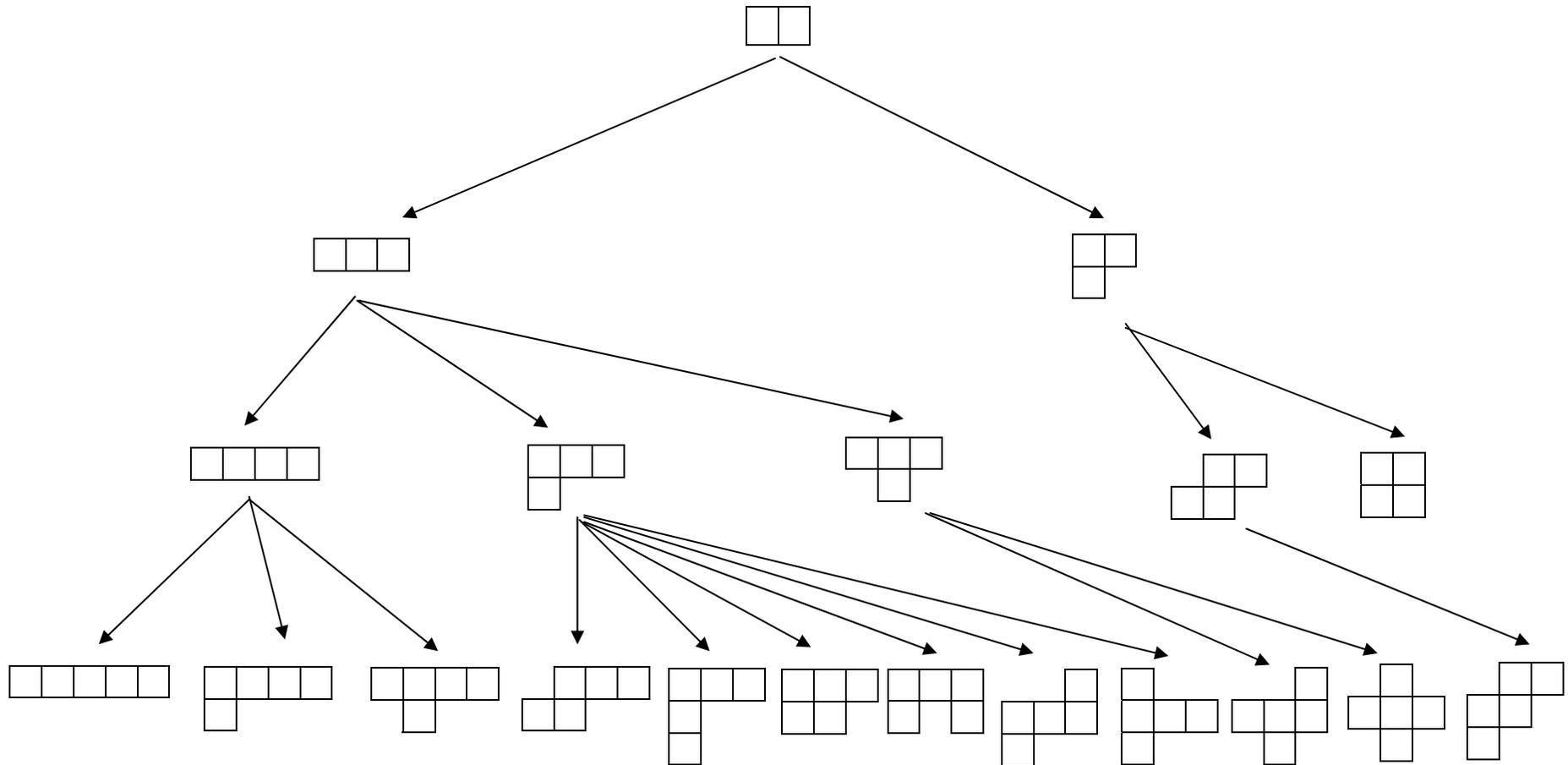
1 Zwilling

2 Drillinge

5 Vierlinge

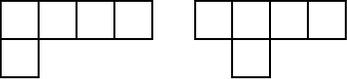
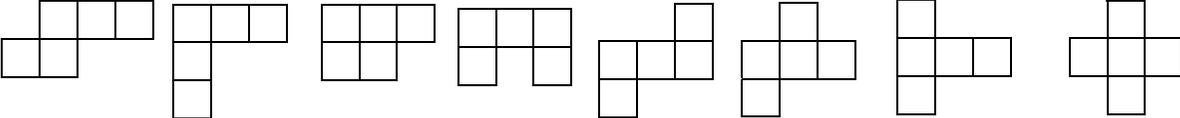
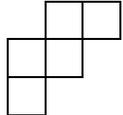
# Bestimmung aller Pentominos (Strategie 1)

Nachfolgend werden rekursiv die 2 Triominos aus dem einen Domino, die 5 Tetrominos aus den 2 Triominos und die 12 Pentominos aus den 5 Tetrominos abgeleitet, wobei beim Variieren systematisch von links nach rechts vorgegangen worden ist und nur ein Pfeil für die erste mögliche Lösung eingezeichnet ist.



## Bestimmung aller Pentominos (Strategie 2)

Ausgehend von fünf kongruenten Quadraten lassen sich die zwölf kongruenten Pentominos durch systematisches Variieren wie folgt bestimmen:

Die längste Reihe besteht aus fünf Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus vier Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus drei Quadraten.	
Die längste Reihe besteht aus zwei Quadraten.	

Aus dem Fünfling lässt sich eine Schachtel basteln. Kreuze an.

Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.

ja

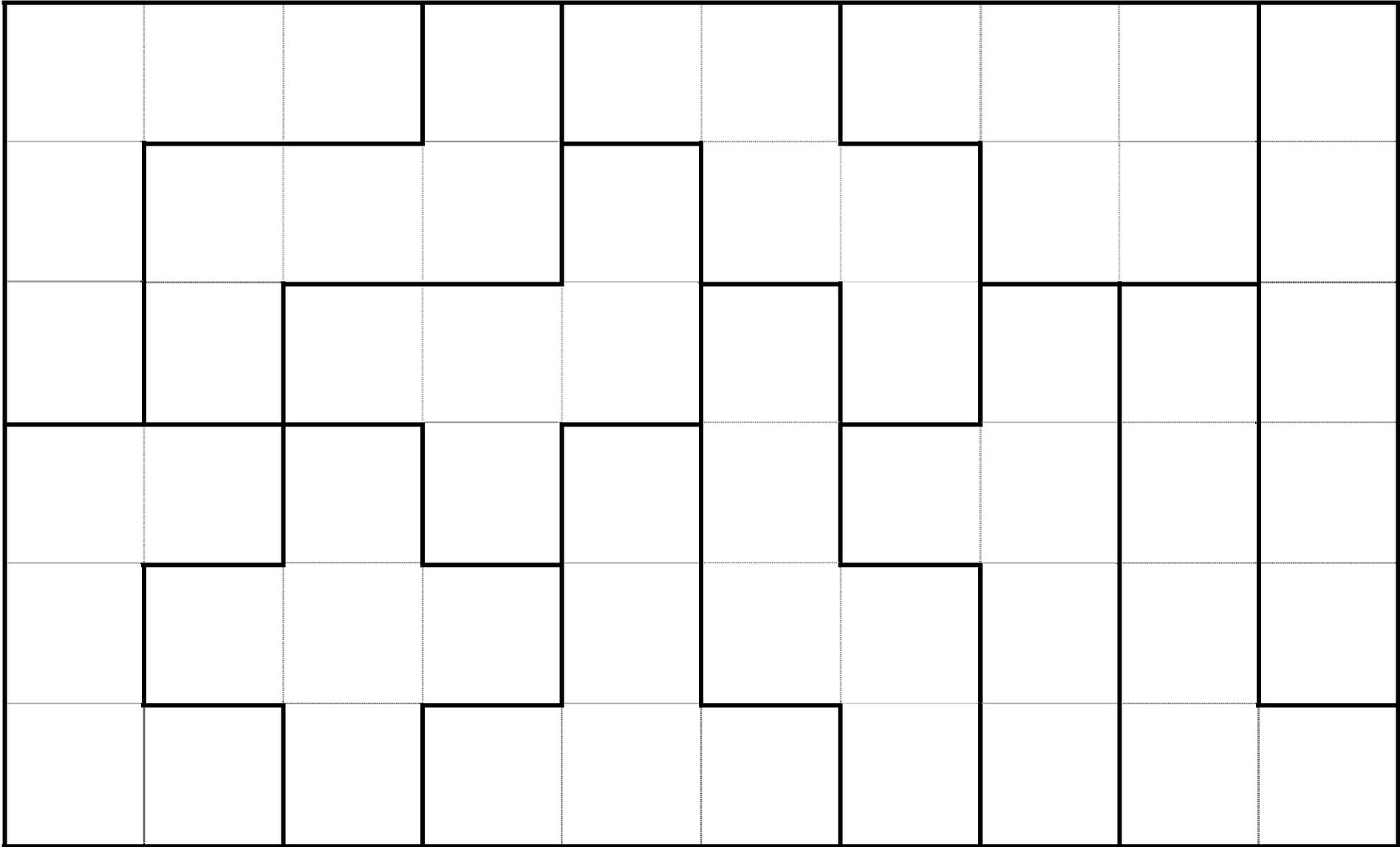
nein

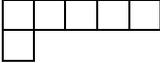
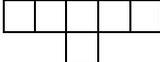
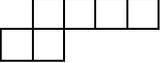
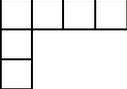
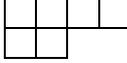
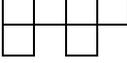
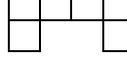
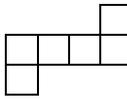
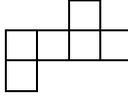
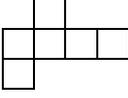


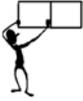
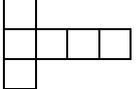
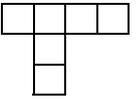
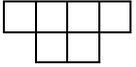
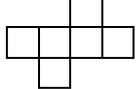
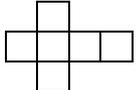
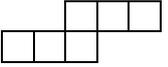
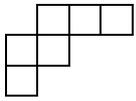
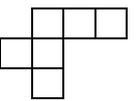
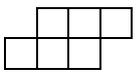
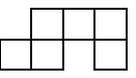
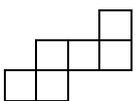
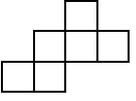
basteln

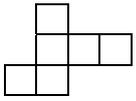
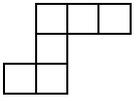
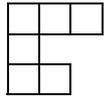
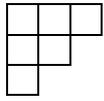
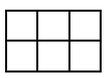
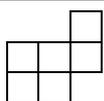
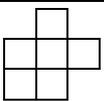
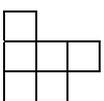
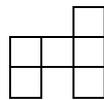
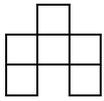
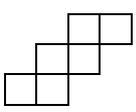


nachdenken

Der Sechserling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.			
		 basteln	 nachdenken		
ja	nein				
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

	Der Sechsling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.	
	ja	nein	 basteln	 nachdenken
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				

		Der Sechsling ist ein Würfelnetz. Kreuze an.		Wie hast du die Antwort gefunden? Kreuze an.	
		ja	nein	 basteln	 nachdenken
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					
33					
34					
35					

1					
---	--	--	--	--	--

2				

3				

4				

	5			

6			

7			

8			

9			

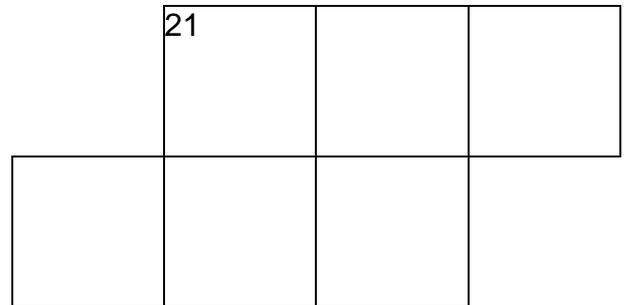
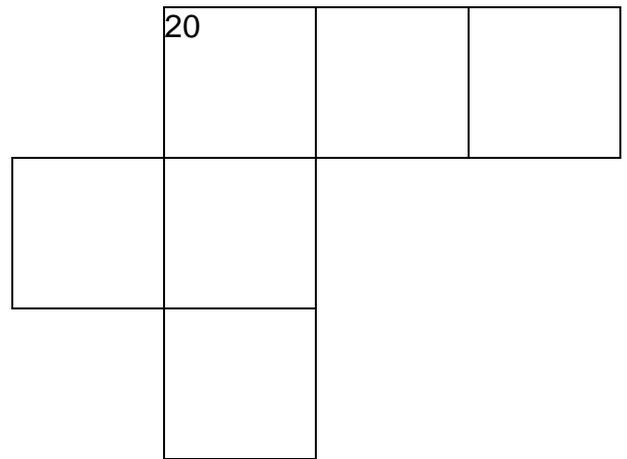
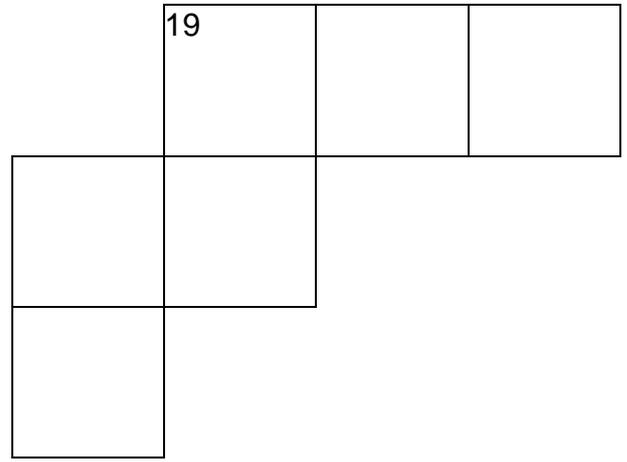
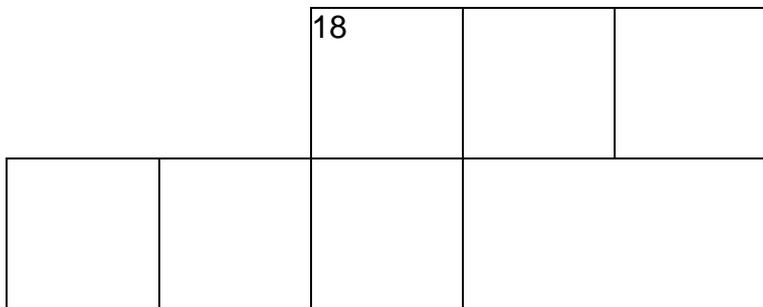
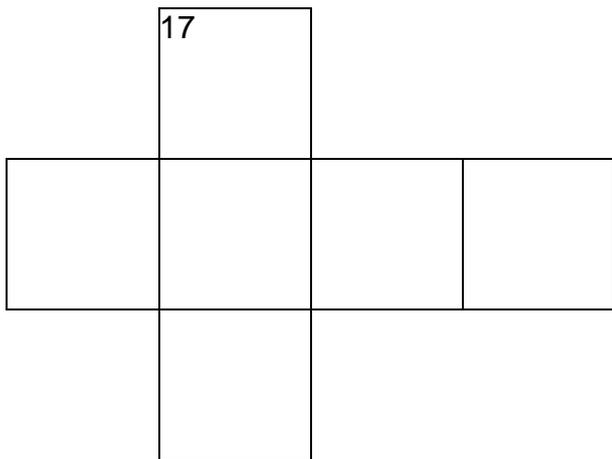
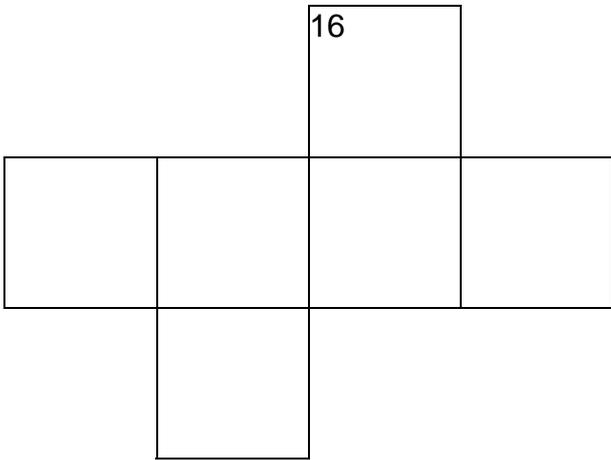
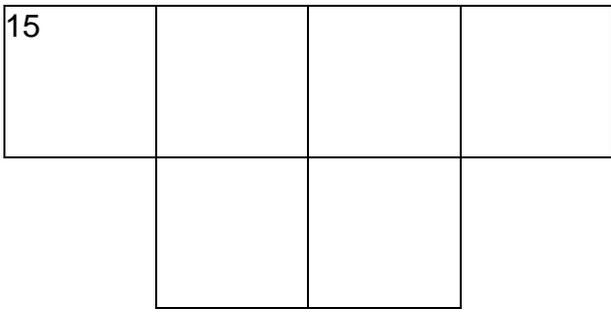
			10

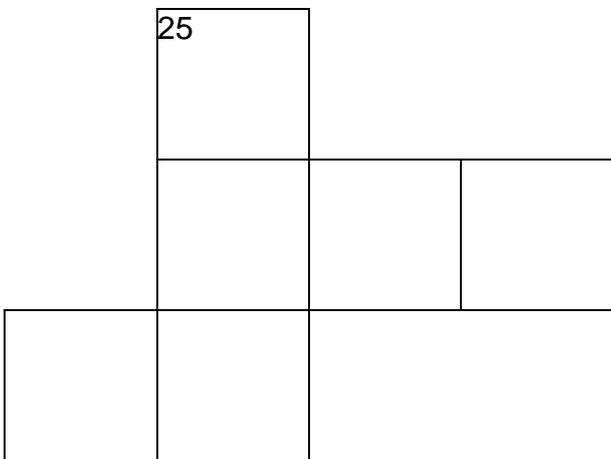
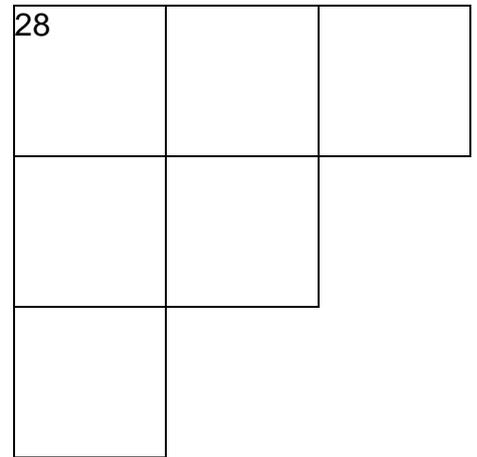
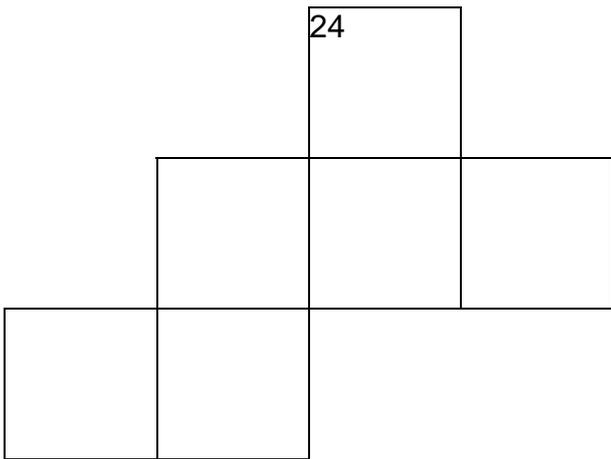
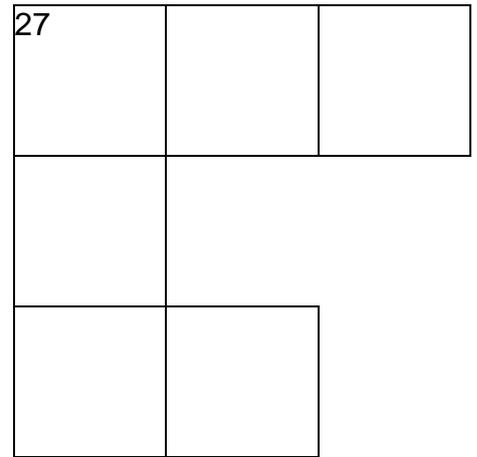
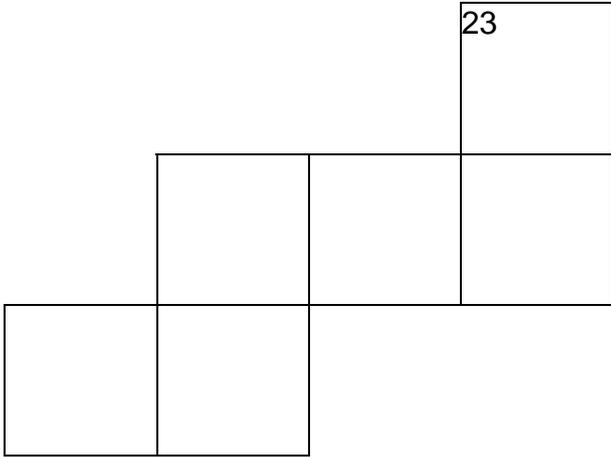
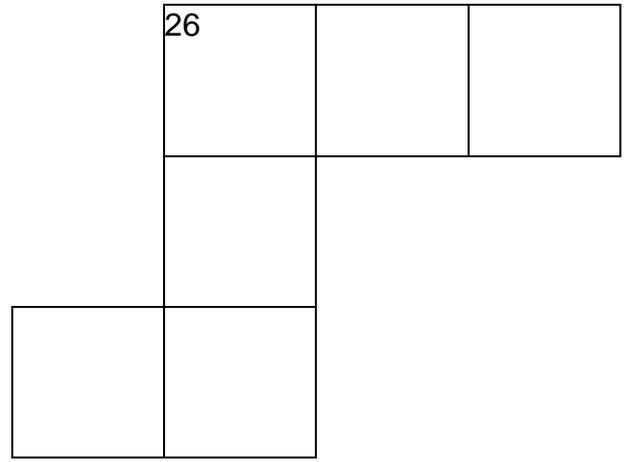
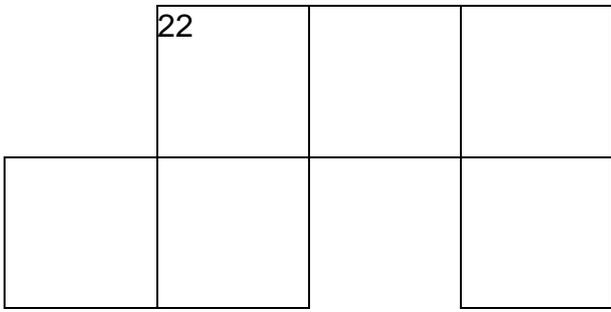
		11	

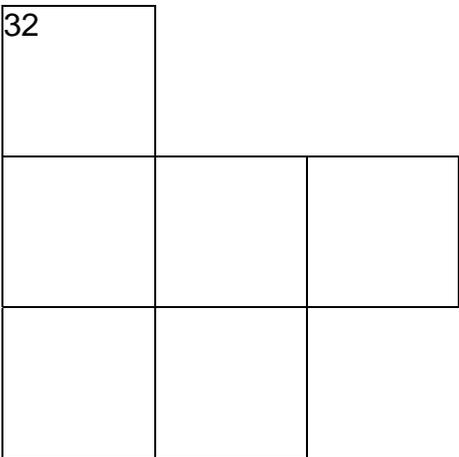
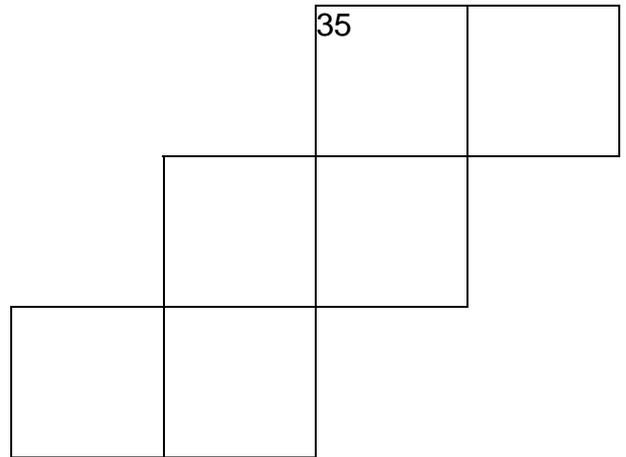
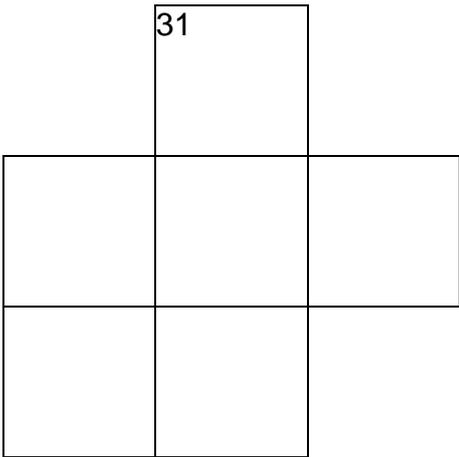
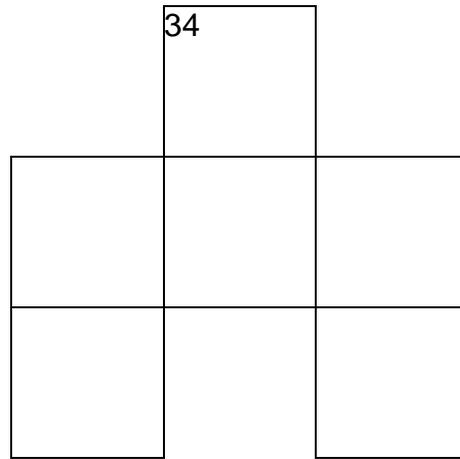
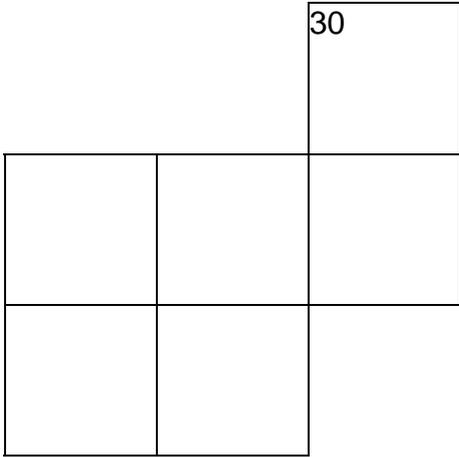
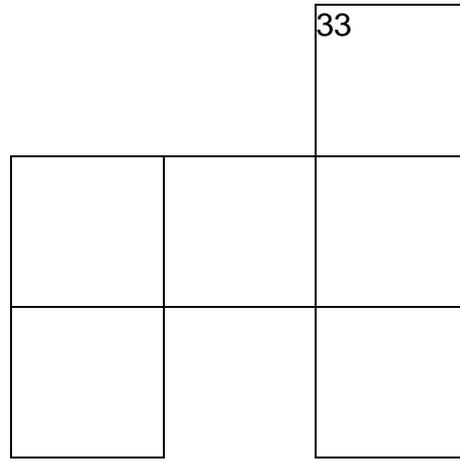
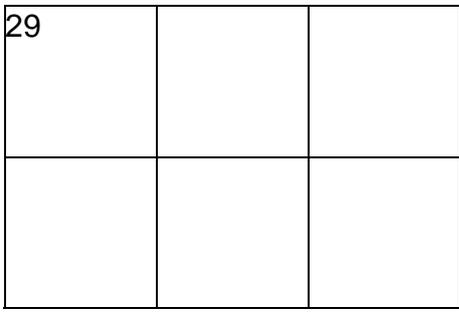
		12	

13			

14			







Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

**Größen und Messen –  
„Preise bei verschiedenen Friseuren vergleichen“**



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

# I. Übersicht: Mathematik

**Bereich:** Größen und Messen

**Lernaufgabe:** Preisangebote bei verschiedenen Friseuren vergleichen

## Bereich des Faches: Größen und Messen

### Leitidee:

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und nutzen tragfähige Größenvorstellungen ebenso wie einen Grundbestand an Kenntnissen und Fertigkeiten beim Umgang mit Größen und bei der Bearbeitung von Sachproblemen aus der Lebenswirklichkeit.

### Kompetenzerwartung

### Kompetenzerwartung

### Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nichtrelevanten Informationen (erfassen) (**Modellieren**)
- übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell und lösen es mithilfe des Modells (lösen) (**Modellieren**)
- bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung (kooperieren und kommunizieren) (**Darstellen/Kommunizieren**)
- entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und stellen sie nachvollziehbar dar (präsentieren und austauschen) (**Darstellen/Kommunizieren**)

### Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Tabellen Daten und ziehen sie zur Beantwortung mathematischer Fragen heran (Daten und Häufigkeiten) (**Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten**)
- nutzen selbstständig Bearbeitungshilfen wie Tabellen, ... zur Lösung von Sachaufgaben (Sachsituationen) (**Größen und Messen**)

**Inhalt:** Preisangebote vergleichen

**Anforderungsbereiche:** Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

**Lernaufgabe/Lernarrangement:** Fragestellungen und Sachaufgaben zu

### Vertiefung des Wissens:

- Weitere Preisangebote durch Befragen oder durch Internetrecherche ermitteln und vergleichen
- Eigene „Lock-Angebote“, Fragestellungen und Sachaufgaben zum Sachkontext formulieren

### Überprüfung der Kompetenzen:

Intern: Bearbeitung ähnlicher Sachaufgaben, Erläuterung der Vorgehensweisen, Lernplakate

Extern: Vergleichsarbeiten

### Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler erkennen relevante Informationen für die Ermittlung von Preisen in Preislisten (AB I)

lösen eine Sachaufgabe mit 1 Lösungsschritt (AB I)

erfassen komplexere Sachinformationen in Textform und deuten sie in Bezug auf die Angaben in den Preisangeboten (AB II)

lösen Sachaufgaben mit mehreren Lösungsschritten (AB II)

lösen komplexe Sachprobleme, bei denen sie mehrere Preisangebote miteinander in Beziehung setzen müssen (AB III)

suchen für eine Person mit bestimmten Eigenschaften das günstigste Preisangebot heraus (AB III)

begründen ihre Entscheidung für ein bestimmtes Preisangebot sachlich angemessen (AB III)

### Übergreifende Kompetenzen:

**Wahrnehmen und Kommunizieren:** Schülerinnen und Schüler lernen, eigene Beobachtungen, Einschätzungen und Überlegungen in unterschiedlicher aber angemessener Weise anderen mitzuteilen, indem sie unterschiedliche Leistungen und Bezugsgrößen in den Preisangeboten erkennen und in Worte fassen.

**Analysieren und Reflektieren:** Schülerinnen und Schüler ziehen zur erfolgreichen Bearbeitung von Sachfragen und Sachproblemen Vorwissen, Vermutungen und Vergleiche heran indem sie ausgefallene Formen von Preisangeboten analysieren, berechnen und vergleichen und in Hinblick auf günstige Angebote beurteilen.

**Strukturieren und Darstellen:** Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit einem offenen Problemkontext (ein individuell zugeschnittenes günstiges Preisangebot herausfinden) heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse und halten diese angemessen fest.

### Arbeits- und Sozialverhalten:

**Kooperationsfähigkeit:** Die Schülerinnen und Schüler stimmen sich ... ab, bringen Vorschläge zur Bearbeitung und Lösung von Aufgaben ein und übernehmen Arbeit.

### Sachaufgaben

#### Verknüpfung zu anderen Fächern:

Deutsch: informierendes Lesen

#### Methoden:

Gemeinsames Lernen

#### Sozialform:

Partnerarbeit

Gruppengespräch

#### Material:

1 Übersicht über Preisangebote von vier Friseursalons  
4 Blätter mit 5 Aufgaben  
Bandmaß oder Zollstock zum Messen der Körpergröße  
Plakate für die Präsentation der Gruppen

#### Bezüge zur Lebenswirklichkeit:

Das Erfahrungsfeld „Friseur“ ist den Kindern bekannt und in der Regel von Bedeutung. Sich mit verschiedenen Preis-Angeboten auseinanderzusetzen gehört zum Alltag und befähigt zu einer kritischen Konsumhaltung.

#### Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit den Größen „Längen“ und „Geldbeträge“ verfügen über Rechenfertigkeiten im schnellen Kopfrechnen, Zahlenrechnen und in den schriftlichen Rechenverfahren  
entnehmen Listen und Tabellen Daten  
messen ihre Körpergröße korrekt.

## II. Aufgabenbeispiel

### Mathematik

**Bereich:** Größen und Messen

**Klasse:** 3/4

**Schwerpunkt:** Sachsituationen

**Vorhaben:** Beim Friseur: Preisvergleich anstellen

**Titel der Lernaufgabe:** Preisangebote bei verschiedenen Friseuren vergleichen

#### Kompetenzen

##### **Lernvoraussetzungen**

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit den Größen „Längen“ und „Geldbeträge“ (umwandeln, vergleichen, rechnen)
- verfügen über Rechenfertigkeiten im schnellen Kopfrechnen, im Zahlenrechnen und in den schriftlichen Rechenverfahren
- können Preislisten Informationen entnehmen
- können ihre Körpergröße korrekt messen

##### **Kompetenzerwartungen**

###### *Prozessbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (erfassen) **(Modellieren)**
- übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell und lösen es mithilfe des Modells (lösen) **(Modellieren)**
- bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung (kooperieren und kommunizieren) **(Darstellen/Kommunizieren)**
- entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und stellen sie nachvollziehbar dar (präsentieren und austauschen) **(Darstellen/Kommunizieren)**

###### *Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Tabellen Daten und ziehen sie zur Beantwortung mathemathikhaltiger Fragen heran (Daten und Häufigkeiten) **(Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten)**
- nutzen ggf. selbstständig Bearbeitungshilfen wie Tabellen, ... zur Lösung von Sachaufgaben (Sachsituationen) **(Größen und Messen)**

#### **Übergreifende Kompetenzen**

*Wahrnehmen und Kommunizieren:* Die Schülerinnen und Schüler lernen, eigene Beobachtungen, Einschätzungen und Überlegungen in unterschiedlicher aber angemessener Weise anderen mitzuteilen, indem sie unterschiedliche Leistungen und Bezugsgrößen in den Preisangeboten erkennen und in Worte fassen.

*Analysieren und Reflektieren:* Die Schülerinnen und Schüler ziehen zur erfolgreichen Bearbeitung von Sachfragen und Sachproblemen Vorwissen, Vermutungen und Ver-

gleiche heran, indem sie ausgefalleneren Formen von Preisangeboten analysieren, berechnen und vergleichen und in Hinblick auf günstige Angebote beurteilen.

*Strukturieren und Darstellen:* Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit einem offenen Problemkontext (ein individuell zugeschnittenes günstiges Preisangebot herausfinden) heraus Erkenntnisse, Einsichten und Ergebnisse und halten diese angemessen fest.

## **Sachinformation**

Die Bearbeitung von Sachproblemen aus der Lebenswirklichkeit vermag Sachwissen zu mehren und Planungskompetenz auszubauen. Die Sachsituationen sollten der Erfahrungswelt der Kinder entsprechen.

„Friseurbesuch“ ist ein Erfahrungsfeld, auf das fast alle Kinder eines 4. Schuljahres zurückgreifen können und das für sie durchaus bedeutsam ist, auch für die Jungen. Oft kennen sich die Kinder auch schon recht gut mit diesbezüglichen Preisen und mit besonderen Angeboten „ihres“ Friseurs aus.

Es ist erstaunlich, mit welcher unterschiedlichen und zum Teil einfallreichen Preis-Leistungsangeboten Friseurläden um ihre jungen (und zukünftigen) Kunden werben. Ein Preisvergleich lohnt sich, ein genaues Analysieren der spezifischen Leistungen offenbart, dass manche „Lockangebote“ gar nicht unbedingt so günstig sind. Genaueres Überprüfen macht Sinn.

Die Auseinandersetzung mit dem Sachkontext des Aufgabenbeispiels vermag – exemplarisch – zu einer kritischeren Konsumhaltung beizutragen.

Die im Aufgabenbeispiel aufgeführten vier Angebote verschiedener Friseursalons sind authentisch und spiegeln die Vielschichtigkeit von Mathematisierungen bei den einzelnen Preisübersichten wider. Die Lösung der einzelnen Aufgabenstellungen verlangt neben Kenntnissen und Fertigkeiten beim Umgang mit Größen (Längen und Geldbeträge) vor allem auch die Fähigkeit, mehreren Darstellungen von Sachkontexten (Textform, Tabelle, Liste) die relevanten Informationen zu entnehmen und diese miteinander zu vergleichen. Den verschiedenen Preisangeboten liegen unterschiedliche mathematische Strukturen zugrunde. Insbesondere müssen die Beziehungen zwischen verschiedenen Größen (Körpergröße und Preis bzw. Alter und Preis) aber auch unterschiedliche inhaltliche Aspekte (Trockenhaarschnitt/waschen, schneiden, föhnen/waschen, schneiden, selber föhnen) berücksichtigt werden. Durch diese vernetzten Vorgehensweisen beim Modellieren ist das Aufgabenbeispiel trotz seiner teilweise geringeren Anforderungen bezüglich des Umgangs mit Größen eher für ein 4. Schuljahr geeignet.

## Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
<b>AB I: Reproduzieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler rechnen mit Größen und wandeln diese um. Sie erfassen einfache relevante Sachinformationen in Textform und in Preis-Angeboten. Sie lösen einfache Sachaufgaben (mit einem Lösungsschritt).
<b>AB II: Zusammenhänge herstellen</b>	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler erfassen komplexere Sachinformationen in Textform und deuten sie in Bezug auf die Angaben in den Preislisten. Sie lösen mehrschrittige Sachaufgaben und nutzen dabei auch ggf. Zahlbeziehungen und Ergebnisse bereits gelöster Aufgaben (z. B. bei Aufgabe 3).
<b>AB III: Verallgemeinern und Reflektieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler lösen komplexe Sachprobleme. Sie setzen die vielschichtigen Informationen verschiedener Preisangebote problembezogen zueinander in Beziehung. Sie begründen ihre Entscheidung für ein bestimmtes Preisangebot sachlich angemessen.

## Preis-Angebote beim Friseur (nur für Kinder!)

### A) KLEINE PREISE FÜR KLEINE LEUTE!

*Wir machen euch jetzt ein Angebot,  
das ihr nicht ablehnen könnt.*

Wenn ihr nicht größer als  
1,50 m seid, dann zahlt ihr  
für euren Trocken-  
haarschnitt  
nur 0,08 € je cm Körpergrö-  
ße.

**Friseur Schnipp-Schnapp**

### B) Kinderhaarschnitt:

#### Trockenhaarschnitt:

bis 5 Jahre: 8 €

ab 6 Jahre: 10 €

waschen, schneiden und  
föhnen: 13 €

Gel oder Haarwachs: 1 €

**Friseur Ratz-Fatz**

### C) *Unser Super-Angebot für Super-Kids:*

waschen, schneiden und föhnen:

14,00 €

Bonuskarte:

Bei jedem Besuch bekommt ihr  
ein Sternchen.

Bei 9 Sternchen gibt es einen  
Haarschnitt **UMSONST!**

*	*	*
*	*	*
*	*	*

**Friseur Ruck-Zuck**

### D) **Macht mit !**

waschen  
schneiden  
selber föhnen

Alter	Preis
10 Jahre	10 €
11 Jahre	11 €
12 Jahre	12 €
13 Jahre	13 €
14 Jahre	14 €

**Friseur Aktiv**

## Anregungen

- Schaut euch die Preis-Angebote der vier Friseursalons an.
  - Welche findet ihr merkwürdig?
  - Welche sind so ähnlich wie bei eurem Friseur?
  - Welche findet ihr gerecht/ungerecht?
  - Was fällt euch noch auf?
- Wie viel bezahlt ihr für einen Friseurbesuch?  
Vergleicht eure Preise. Wer bezahlt am wenigsten?

✂-----

## Aufgabe 1:

Bei

# Friseur Ratz-Fatz

Gerrit geht zu **Ratz-Fatz**.

Wie viel muss Gerrit für ihren Friseurbesuch bezahlen?

Kreuze an, welche Informationen du unbedingt brauchst, um die Frage mithilfe der Preisliste von **Ratz-Fatz** beantworten zu können.

- Gerrit ist ein Mädchen.
- Gerrit ist 1,25 m groß.
- Gerrit ist 8 Jahre alt.
- Gerrit geht nicht gerne zum Friseur.
- Gerrit lässt sich einen Trockenhaarschnitt machen.
- Gerrit findet Gel im Haar schrecklich.

Gerrit muss für ihren Friseurbesuch \_\_\_\_\_ Euro bezahlen.

(AB I)

## Aufgabe 2:

### Bei welchem Friseur waren die Kinder?

a) Lisa (10 Jahre):

**Ich habe für waschen, schneiden und föhnen 13 Euro bezahlt.“**

Lisa war bei \_\_\_\_\_ . (AB I)

b) Aaron (11 Jahre):

**„Ich war gestern beim Friseur. Für Haare waschen und schneiden habe ich 11 Euro bezahlt. Ich musste mir die Haare selber föhnen“.**

Aaron war bei \_\_\_\_\_ . (AB I)

c) René (9 Jahre):

**„Ich gehe jeden Monat einmal zum Friseur. Beim nächsten Mal brauche ich gar nichts zu bezahlen.“**

René geht zu \_\_\_\_\_ . (AB II)

d) Die beiden Freundinnen Irina (10 Jahre) und Jana (11 Jahre):

**„Wir waren beide bei demselben Friseur. Ich habe 40 Cent weniger bezahlt als meine Freundin Jana.“**

Die beiden Freundinnen waren bei \_\_\_\_\_ (AB II)

### Aufgabe 3:

Bei

## **Friseur Schnipp-Schnapp**

a) Murat ist 1,48 m groß.

Wie viel muss er bei **Schnipp-Schnapp** für einen Trockenhaarschnitt bezahlen?

Antwort: \_\_\_\_\_ (AB I)

b) Paula hat bei **Schnipp-Schnapp** genau 12 Euro bezahlt.

Wie viel cm ist sie größer als Murat?

Antwort: Paula ist \_\_\_\_\_ cm größer als Murat. (AB II)

c) Wie viel Euro müsstest **du** für einen Trockenhaarschnitt bei **Schnipp-Schnapp** bezahlen?

Antwort: **Ich** müsste bei **Schnipp-Schnapp** \_\_\_\_ Euro bezahlen (AB I)

d) Wie groß darf ein Kind höchstens sein, sodass ein Trockenhaarschnitt bei **Schnipp-Schnapp** günstiger ist als bei **Ratz-Fatz**?

Antwort: Ein Kind darf höchstens \_\_\_\_\_ groß sein. (AB III)

#### Aufgabe 4:

- a) René war 10-mal bei **Ruck-Zuck**.  
Lisa war 10-mal bei **Ratz-Fatz**.

Wer hat für waschen, schneiden und föhnen insgesamt mehr Geld ausgegeben? Begründe.

---

---

---

---

---

(AB II)

#### Aufgabe 5:

Levi ist 7 Jahre alt und 1,20 m groß. Er geht zweimal im Jahr zum Friseur.  
Zu welchem Friseur soll Levi gehen?

Schreibt auf ein Plakat, was ihr euch alles überlegt und gerechnet habt.  
Erklärt es den anderen Kindern.

(AB III)

## Erwartete Lernergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler tauschen sich über ihre Erfahrungen bezüglich eines Friseurbesuchs und über die Preise aus.

Sie bearbeiten die Aufgabenstellungen auf dem Arbeitsblatt selbstständig in Partner- bzw. Gruppenarbeit.

Sie teilen ihre Überlegungen zu verschiedenen Fragestellungen und Aufgaben mit und vergleichen Ergebnisse und Lösungswege.

Sie gestalten ein Plakat zu ihren Überlegungen und Rechnungen.

## Hinweise zum Unterricht

Als Hinführung zum Aufgabenbeispiel sind verschiedene Einstiege denkbar: So besteht die Möglichkeit, den Kindern eins der Angebote auf einer Folie vergrößert zu präsentieren und zunächst ein allgemeines Unterrichtsgespräch über die Erfahrungen der Kinder bezüglich eines Friseurbesuchs anzuregen. Mit Sicherheit kommen dabei auch die Preise zur Sprache. Damit kann zum Aufgabenbeispiel mit der Angebotsübersicht und den Aufgabenstellungen übergeleitet werden.

Die Anregungen und Aufgaben sollten weitgehend zusammen mit einem Partner erarbeitet und diskutiert werden, **Aufgabe 5** möglichst in der Gruppe.

**Aufgabe 3** verlangt ggf. als Lösungsweg die Multiplikation zweier verschiedener Größen. Da dies mathematisch nicht möglich ist, sollte bei der Notation der Rechenaufgabe auf Größenbezeichnungen ganz verzichtet oder lediglich die für Geld verwendet werden.

Bei mehreren Aufgabenstellungen können die Kinder auf unterschiedlichen Wegen zu einer Lösung gelangen. So kann die Lösung von **Aufgabe 3b** z. B. durch Division, über eine Schließtafel oder aber auch durch den Vergleich mit dem in Aufgabe 3a errechneten Preis für Murat ermittelt werden: Murat muss 11,84 € bezahlen. Paula muss 16 ct mehr bezahlen als Murat. Also muss sie 2 cm größer sein als Murat.

Die Kinder sollten Gelegenheit bekommen, ihre Lösungswege und Überlegungen vorzustellen.

**Aufgabe 5** ist eine offener Aufgabenstellung. Hierbei gibt es keine eindeutig richtige Lösung. Mathematische und inhaltliche Aspekte spielen eine Rolle. Bei ihren Überlegungen müssen sich die Schülerinnen und Schüler in der Gruppe z. B. darauf verständigen, welchen Service ein 7-jähriger Junge wohl in Anspruch nehmen möchte (Trockenhaarschnitt, Waschen-Schneiden-Föhnen, Haarwachs ...) oder ob es sich lohnt, bei zweimaligem Friseurbesuch im Jahr Bonuspunkte zu sammeln etc. Möglicherweise kommen die Kinder auch auf die Idee, die Tabelle von „Friseur Aktiv“ für Levi passend zu erweitern. Die Kinder sollten noch einmal besonders dazu angehalten werden, ihre Überlegungen und Entscheidungen auf einem Plakat anschaulich für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler festzuhalten. Natürlich können sie ihr Plakat auch themenbezogen gestalterisch ausschmücken.

## Anwendungszusammenhang

Im Anschluss an die Bearbeitung der Arbeitsblätter sollte auf jeden Fall nochmals auf das eigene Erfahrungsfeld der Kinder zurückgegriffen werden. Die Preisangebote des „eigenen“ Friseurs sollten – falls nicht bekannt – erfragt werden. Internetrecher-

chen ergeben ggf. weiteres Zahlenmaterial, zu dem die Kinder selbst Fragen oder Aufgabenstellungen formulieren können.

Wenn Interesse vorhanden ist, können die Kinder auch angeregt werden, Preisangebote von weiteren Einrichtungen zu erkunden (z. B. Schwimmbad) und „Lock-Angebote“ sowie eigene Aufgaben und Fragestellungen zu entwickeln.

### **Material**

- 1 Übersicht über Preisangebote von vier Friseursalons
- 4 Arbeitsblätter mit 5 Aufgaben
- Bandmaß oder Zollstock zum Messen der Körpergröße
- Plakate für die Präsentation von Aufgabe 5

Ministerium für Schule und Weiterbildung  
des Landes Nordrhein - Westfalen

# Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

**Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten –  
„Mögliche Ereignisse eines Zufallsexperimentes  
bestimmen und untersuchen“**



Ministerium für  
Schule und Weiterbildung  
des Landes  
Nordrhein-Westfalen

# I. Übersicht: Mathematik

Bereich: Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

**Lernaufgabe:** Zufallsexperiment  
„Zahlen ziehen und addieren“

**Bereich des Faches: Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten**  
Die Schülerinnen und Schüler erheben Daten und stellen sie unterschiedlich dar; sie bewerten sie in Bezug auf konkrete Fragestellungen und schätzen die Wahrscheinlichkeit einfacher Ereignisse ein.

Kompetenzerwartung

Kompetenzerwartung

## Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen, etc. zutreffend sind. (überprüfen) (**Argumentieren**)
- bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach. (folgern) (**Argumentieren**)
- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung. (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest z. B. im Lerntagebuch (dokumentieren) (**Darstellen/Kommunizieren**)
- bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung. (kooperieren und kommunizieren) (**Darstellen/Kommunizieren**)

## Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen. (Wahrscheinlichkeiten) (**Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten**)
- beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (z. B. mit Begriffen wie „sicher, wahrscheinlich, ...“). (Wahrscheinlichkeiten) (**Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten**)

**Inhalt:** Zufallsexperiment „Zahlen ziehen und addieren“

**Anforderungsbereiche:** Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

**Lernaufgabe/Lernarrangement:** Zufallsexperiment „Zahlen ziehen und addieren“

Mögliche Ereignisse eines Zufallsexperimentes bestimmen und untersuchen

## Vertiefung des Wissens:

Weiterführende Aufgaben zu Eintrittswahrscheinlichkeiten zum bekannten Zufallsexperiment

Bestimmung der möglichen Ereignisse und Eintrittswahrscheinlichkeiten bei anderen komplexeren Zufallsexperimenten

## Überprüfung der Kompetenzen:

Intern: Beobachtungen beim Bearbeiten der Aufgaben, mündliche Erklärungen (Gruppengespräch), schriftliche Erläuterungen (Forschertagebuch)  
Extern: Vergleichsarbeiten

## Arbeitsaufträge

### Verknüpfung zu anderen Fächern:

### Methoden:

Gemeinsames Lernen

### Sozialform:

Partnerarbeit  
Gruppengespräch

### Medien:

3 Blätter mit 5 Aufgaben  
3 weiße, 3 graue und 3 gepunktete Zahlenkarten  
Forschertagebuch (bzw. Blätter)

### Bezüge zur Lebenswirklichkeit:

### Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100.  
entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen ... mit eigenen Worten.  
kennen die Begriffe „wahr“ und „falsch“, um Aussagen einen Wahrheitswert zuzuweisen.  
kennen die Bedeutung von Begriffen zur Beschreibung der Eintrittswahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, nicht möglich).  
verfügen bereits über erste Erfahrungen mit einfachen Zufallsexperimenten (z. B. Drehen mit Glücksrädern, Würfeln mit einem Würfel).

## Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

geben mögliche Ziehungen mit den dazugehörigen Summen an. (AB I).

weisen Aussagen zur Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen, deren Wahrheitsgehalt nach Bearbeitung der vorangegangenen Aufgaben unmittelbar auf der Hand liegt, die Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu. (AB I)

ermitteln aufgrund erkannter Zahlbeziehungen nicht nur die kleinste und die größte mögliche Summe, sondern auch alle anderen möglichen Summen. (AB II)

finden zu vorgegebenen Summen mögliche Ziehungen. (AB II)

weisen Aussagen zur Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen, deren Wahrheitsgehalt erschlossen werden muss, die Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu und finden zu vorgegebenen Aussagen passende Beispiele. (AB II).

entwickeln aufgrund erkannter Zahlbeziehungen Strategien, um zu vorgegebenen Summen alle möglichen Ziehungen zu finden. (AB III)

geben nicht nur **eine** Möglichkeit an, wie die Karten entsprechend einer Vorgabe mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftet werden können, sondern begründen auch, warum es mehrere Möglichkeiten gibt. (AB III)

## Übergreifende Kompetenzen:

**Wahrnehmen und Kommunizieren:** Schülerinnen und Schüler lernen, eigene Beobachtungen, Einschätzungen und Überlegungen in unterschiedlicher, aber angemessener Weise anderen mitzuteilen.

**Analysieren und Reflektieren:** Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen.

## Arbeits- und Sozialverhalten:

### Kooperationsfähigkeit:

Die Schülerinnen und Schüler stimmen sich ... ab, bringen Vorschläge zur Bearbeitung und Lösung von Aufgaben ein und übernehmen Arbeit.

## II. Aufgabenbeispiel

### Mathematik

**Bereich:** Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten **Klasse:** 3/4  
**Schwerpunkt:** Wahrscheinlichkeiten  
**Vorhaben:** Zufallsexperiment „Zahlen ziehen und addieren“

**Titel der Lernaufgabe:** Zufallsexperiment „Zahlen ziehen und addieren“

#### Kompetenzen

##### **Lernvoraussetzungen**

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100.
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen ... mit eigenen Worten.
- kennen die Bedeutung von Begriffen zur Beschreibung der Eintrittswahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (sicher, wahrscheinlich, nicht möglich).
- verfügen bereits über erste Erfahrungen mit einfachen Zufallsexperimenten (z. B. Würfeln mit einem Würfel, Werfen einer Münze).

##### **Kompetenzerwartungen**

###### *Prozessbezogene Kompetenzerwartungen*

Die Schülerinnen und Schüler

- testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen etc. zutreffend sind. (überprüfen) **(Argumentieren)**
- bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach. (folgern) **(Argumentieren)**
- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung. (lösen) **(Problemlösen/kreativ sein)**
- halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest, z. B. im Lerntagebuch (dokumentieren) **(Darstellen/Kommunizieren)**
- bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung. (kooperieren und kommunizieren) **(Darstellen/Kommunizieren)**

###### *Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:*

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen. (Wahrscheinlichkeiten) **(Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten)**
- beschreiben die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen (z. B. mit Begriffen wie „sicher, wahrscheinlich, ...“). (Wahrscheinlichkeiten) **(Daten, Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten)**

## Übergreifende Kompetenzen

*Wahrnehmen und Kommunizieren:* Schülerinnen und Schüler lernen, eigene Beobachtungen, Einschätzungen und Überlegungen in unterschiedlicher aber angemessener Weise anderen mitzuteilen.

*Analysieren und Reflektieren:* Schülerinnen und Schüler lernen neue Erkenntnisse mit vorhandenen Kenntnissen und Mustern zu vergleichen, um zu neuen Bewertungen und Einschätzungen zu kommen.

## Sachinformation

Beim Zufallsexperiment „Zahlen ziehen und addieren“ sind 27 Ziehungen mit 7 verschiedenen Summen möglich, wobei die Eintrittswahrscheinlichkeit der einzelnen Summen unterschiedlich groß ist:

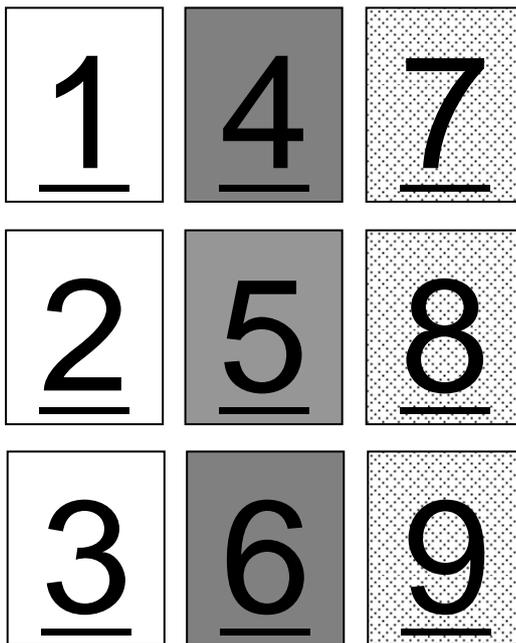
27 mögliche Ziehungen	147	148 157	149 158 167	159 168	169		
		247	248 257	249 258 267	259 268	269	
			347	348 357	349 358 367	359 368	369
7 mögliche Summen	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl der günstigen Ziehungen bzgl. jeder Summe	1	3	6	7	6	3	1

## Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
<b>AB I: Reproduzieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler geben mögliche Ziehungen mit den dazugehörigen Summen an. Sie weisen Aussagen zur Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen, deren Wahrheitsgehalt nach Bearbeitung der vorangegangenen Aufgaben unmittelbar auf der Hand liegt, die Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu.
<b>AB II: Zusammenhänge herstellen</b>	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	Die Schülerinnen und Schüler ermitteln aufgrund erkannter Zahlbeziehungen nicht nur die kleinste und die größte mögliche Summe, sondern auch alle anderen möglichen Summen. Sie finden zu vorgegebenen Summen mögliche Ziehungen. Sie weisen Aussagen zur Eintrittswahrscheinlichkeit von Ereignissen, deren Wahrheitsgehalt erschlossen werden muss, die Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu und finden zu vorgegebenen Aussagen passende Beispiele.
<b>AB III: Verallgemeinern und Reflektieren</b>	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln aufgrund erkannter Zahlbeziehungen Strategien, um zu vorgegebenen Summen alle möglichen Ziehungen zu finden. Sie geben nicht nur <b>eine</b> Möglichkeit an, wie die Karten entsprechend einer Vorgabe mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftet werden können, sondern begründen auch, warum es mehrere Möglichkeiten gibt.

## Ausgestaltung der Lernaufgabe

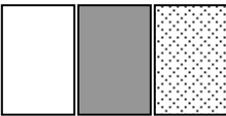
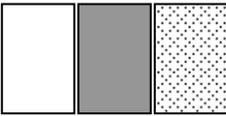
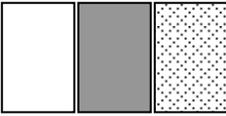
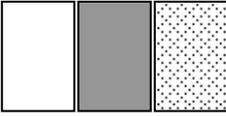
### Experiment „Zahlen ziehen und addieren“



Lege die 9 Karten **verdeckt** auf den Tisch und mische sie.  
Ziehe eine weiße, eine graue und eine gepunktete Karte.  
Schreibe die 3 gezogenen Zahlen auf und berechne ihre Summe.

#### Aufgabe 1: (AB I)

Schreibe 4 mögliche Ziehungen mit Summe auf.

	Summe
 → <input type="text"/>	<input type="text"/>
 → <input type="text"/>	<input type="text"/>
 → <input type="text"/>	<input type="text"/>
 → <input type="text"/>	<input type="text"/>

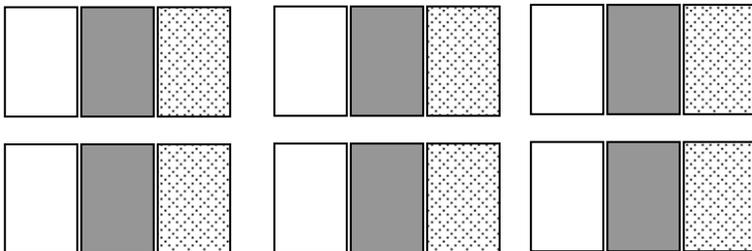
**Aufgabe 2:**

a. Welches ist die kleinste mögliche Summe?  Begründe. (Blatt) (AB II)

b. Welches ist die größte mögliche Summe?  Begründe. (Blatt) (AB II)

c. Welche **Summen** kannst du bei den Ziehungen erhalten? Schreibe alle auf. (AB II)

d. Zur Summe 14 gibt es 6 mögliche Ziehungen. Finde mindestens 3 mögliche Ziehungen. (AB II bzw. AB III)



e. Finde alle 3 möglichen Ziehungen zur Summe 17. (AB III)



**Aufgabe 3:** (AB I/II)

Ist die Aussage wahr oder falsch. Trage **w** (wahr) oder **f** (falsch) ein.

		w oder f
a.	Es ist möglich, 5 als Summe zu erhalten.	
b.	Es ist sicher, eine Summe größer als 20 zu erhalten.	
c.	Es ist unmöglich, die 10 als Summe zu erhalten.	

(AB I)

		w oder f
d.	Es ist unmöglich, eine gerade und zwei ungerade Zahlen zu ziehen.	
e.	Es ist möglich, aber nicht sicher, zwei gerade und eine ungerade Zahl zu ziehen.	
f.	Es ist möglich, aber nicht sicher, eine ungerade Summe zu erhalten.	

(AB II)

**Aufgabe 4: (AB II)**

Gib jeweils ein passendes Beispiel für eine Ziehung an.

Es ist möglich, drei ungerade Zahlen zu ziehen.

Beispiel:



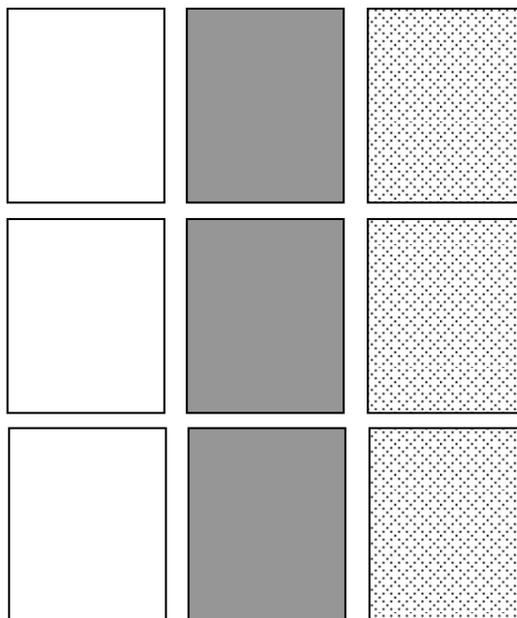
Es ist nicht sicher, drei ungerade Zahlen zu ziehen.

Beispiel:



**Aufgabe 5: (AB III)**

Trage die Zahlen von 1 bis 9 so ein, dass bei Ziehungen als kleinste Summe 6 und als größte Summe 24 möglich ist.



Es gibt mehrere Möglichkeiten. Begründe. (Blatt)

## Lösungshinweise zu den Aufgaben 2, 3 und 4

### Aufgabe 2:

- Die kleinste Summe ist 12.  
Sie ergibt sich durch Addition der drei jeweils kleinsten Zahlen:  $1 + 4 + 7 = 12$ .
- Die größte Summe ist 18.  
Sie ergibt sich durch Addition der drei jeweils größten Zahlen:  $3 + 6 + 9 = 18$ .
- Da die Zahlen von 1 bis 9 jeweils um 1 größer werden, kommen alle Zahlen zwischen 12 und 18 als Summen vor.
- Die 6 möglichen Ziehungen zur 14 sind:  
149, 158, 167, 248, 257, 347
- Die 3 möglichen Ziehungen zur 17 sind:  
269, 359, 368

### Aufgabe 3:

- Antwort: f, da 12 die kleinste Summe ist, ist es nicht möglich, 5 als Summe zu erhalten.
- Antwort: f, da alle möglichen Summen zwischen 12 und 18 liegen und damit kleiner als 20 sind.
- Antwort: w, da 12 die kleinste mögliche Summe ist, kann man 10 unmöglich als Summe erhalten.
- Antwort: f, da z. B. die Ziehung 259 (gerade, ungerade, ungerade) möglich ist.
- Antwort: w, da z. B. die Ziehung 247 (zwei gerade Zahlen, eine ungerade Zahl) möglich ist. Da aber auch z. B. drei gerade Zahlen gezogen werden könnten (248), ist eine Ziehung von zwei geraden Zahlen und einer ungeraden Zahl nicht sicher.
- Antwort: w, denn eine ungerade Summe ist möglich (Summen: 13, 15, 17). Eine ungerade Summe ist aber nicht sicher, denn es könnten auch 3 Zahlen gezogen werden, die eine gerade Summe ergeben (z. B. 1, 6, 9 mit der Summe 16).

### Aufgabe 4:

Es ist möglich, drei ungerade Zahlen zu ziehen. Beispiel: 159

Es ist nicht sicher, drei ungerade Zahlen zu ziehen. Beispiel: 248

### Aufgabe 5:

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>2</u>
<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>8</u>
<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>9</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>3</u>	<u>5</u>
			(1)			(2)				(3)	

Es können

- die Spalten (1) oder
- die Zeilen (2) oder
- erst die Spalten und dann noch die Zahlen in jeder Spalte (3) oder
- erst die Zeilen und dann noch die Zahlen in jeder Zeile vertauscht werden.

## **Erwartete Lernergebnisse**

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgaben selbstständig in Partnerarbeit.

Durch die Bereitstellung des konkreten Materials (Karten) haben die Schülerinnen und Schüler bei einigen Aufgaben die Möglichkeit, die Aufgaben konkret handelnd zu lösen, können aber auch auf die Durchführung von Ziehungen ganz verzichten.

Sie stellen Vermutungen an, bestätigen oder widerlegen diese, nutzen Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung und setzen sich mit den Meinungen anderer kritisch auseinander.

## **Hinweise zum Unterricht**

Zufallsexperimente mit Würfeln und Münzen sind allseits bekannt. Für die Schülerinnen und Schüler ist es deshalb umso reizvoller, ein anderes kindgemäßes Zufallsexperiment kennen zu lernen und Erfahrungen damit zu sammeln.

Da die Aufgaben 3 bis 5 nur dann erfolgreich bearbeitet werden können, wenn das Wissen aus den Aufgaben 1 und 2 zur Verfügung steht, ist es sinnvoll, den Schülerinnen und Schülern zunächst nur die beiden ersten Aufgaben zur Bearbeitung zu geben.

Indem die Aufgaben in Partnerarbeit bearbeitet werden, haben die Partner nicht nur die Chance zum Lernen mit- und voneinander; auf diese Weise können durch die gegenseitige Kontrolle auch leicht kleine Flüchtigkeitsfehler beim Rechnen aufgedeckt werden, die ansonsten schnell zu falschen Schlussfolgerungen verleiten könnten.

Wichtig ist es, die Partnergruppen vorab ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass sie bei einigen Aufgaben (Aufgabe 2a, Aufgabe 2b, Aufgabe 5) nicht vergessen, ihre Begründungen aufzuschreiben.

Da das vorliegende Zufallsexperiment recht einfach ist und auch auf dem Arbeitsblatt erklärt wird, kann auf eine Vorstellung im Klassenverband vor Arbeitsbeginn verzichtet werden.

Ansonsten würden auch schon mögliche Ziehungen verraten, die erst in Aufgabe 1 notiert werden sollen.

Schnell arbeitende Schülerinnen und Schüler können in Analogie zu den Aufgaben 2d und 2e noch zu anderen Summen alle möglichen Ziehungen ermitteln oder aufgefordert werden, alle möglichen Ziehungen mit ihren Summen möglichst systematisch zu bestimmen.

Bevor die Aufgaben 3 bis 5 vorgelegt werden, sollten die Schülerinnen und Schüler – wie oben bereits angedeutet – in Kleingruppengesprächen oder im Klassengespräch sich gegenseitig erklären, wie sie die kleinste und größte Summe jeweils ermittelte und wie sie des Weiteren alle möglichen Summen bestimmt haben.

Mit diesem Hintergrundwissen lassen sich dann den Aussagen a bis c der Aufgabe 3 ganz leicht die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zuweisen, während die Beurteilung der Aussagen d bis e schlussfolgerndes Denken voraussetzt.

Oft kommt es in der Mathematik darauf an, passende Beispiele bzw. Gegenbeispiele angeben zu können. Dies wird durch die Bearbeitung von Aufgabe 4 angebahnt. Da die Angabe jeweils eines Beispiels zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe genügt, sich aber viele Beispiele angeben lassen, darf im Unterricht nicht versäumt werden, die von den Schülerinnen und Schülern gefundenen Beispiele zusammenzutragen.

Um das Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen fördern zu können, geht es bei Aufgabe 5 darum, die Zahlen von 1 bis 9 anders anordnen zu müssen als dies bei der vorgegebenen Beschriftung der Karten der Fall war. Diese Aufgabe kann zudem Anlass sein für weitere Variationen der Beschriftung der Karten und entsprechend zur Förderung der Kreativität der Schülerinnen und Schüler beitragen.

*Vertiefung des Wissens:*

Zur Vertiefung des Wissens sind weiterführende Aufgaben mit den vorgegebenen Karten denkbar, wie z. B.

(1)

Finde alle möglichen Ziehungen.

Versuche, die Ziehungen mit Summe so übersichtlich aufzuschreiben, dass du keine vergisst.

(2)

Stell dir vor, du spielst mit einigen Freunden das Spiel „Zahlen ziehen und addieren“. Jeder Mitspieler darf sich vor Spielbeginn eine der möglichen Summen auswählen. Nach jeder Ziehung erhält der Spieler einen Punkt, dessen Summe gezogen worden ist.

Sieger ist, wer nach 30 Ziehungen die höchste Punktzahl erreicht hat.

Welche Summe würdest du auswählen?

Ich würde die  wählen. Begründe deine Wahl. (Blatt)

(3)

Ist die Aussage wahr oder falsch. Trage **w** (wahr) oder **f** (falsch) ein.

Begründe deine Entscheidung. (Blatt)

		w oder f
a.	Es ist wahrscheinlicher, eine gerade Zahl als Summe zu erhalten als eine ungerade.	
b.	Es ist gleich wahrscheinlich, eine Summe größer als 16 zu erhalten oder die Summe 15.	

Zur Vertiefung des Wissens kann auch die Bestimmung der möglichen Ereignisse und Eintrittswahrscheinlichkeiten bei anderen komplexeren Zufallsexperimenten (z. B. dreimaliges Werfen einer Münze, Urnenexperimente mit mehrmaligem Ziehen) beitragen.

## **Material und Anhang**

- **3 Arbeitsblätter mit 5 Aufgaben**

- **5 Kopiervorlagen zum Anfertigen der Karten**

Ziffern 1, 2 und 3: Vorderseite, Rückseite bleibt weiß

Ziffern 4, 5 und 6: Vorderseite, Rückseite

Ziffern 7, 8 und 9: Vorderseite, Rückseite

Hinweis:

Damit die Ziffern nicht durchschimmern, sollte Fotokopierpapier 160 g oder höher benutzt werden.

Ein Kopieren der Rückseiten ist notwendig, damit auch nach dem Umdrehen der Karten die drei Sorten (weiß, grau und gepunktet) noch zu unterscheiden sind.

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>



