**Hilfekarten**

Gruppe 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.21Ein Pyramidenstumpf setzt sich zusammen aus 4 Teilpyramiden, 4 Keilen und einer quadratischen Säule.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Teilkörper | Quadratische Säule | Keil | Pyramide |
| Skizze |  |  |  |
| Anzahl | 1 | 4 | 4 |
| Volumenformel | $$V\_{S}=b∙b∙h$$ | $$V\_{K}=\frac{1}{2}∙b∙d∙h$$ | $$V\_{P}=\frac{1}{3}∙d∙d∙h$$ |

  |
| 1.22Gegeben: $b=4 cm, d=\frac{1}{2}\left(10 cm-4 cm\right)=3 cm, h=8 cm$Rechnung: $V=4∙V\_{P}+4∙V\_{K}+V\_{S}$ $V=\frac{1}{3}∙d∙d∙h+\frac{1}{2}∙b∙d∙h+b∙b∙h$ $V=4∙\left(\frac{1}{3}∙3 cm∙3 cm∙8 cm\right)+4∙(\frac{1}{2}∙4 cm∙3 cm∙8 cm)+4 cm∙4 cm∙8cm$ $V=96 cm^{3}+192 cm^{3}+128 cm^{3}$ $V=416 cm^{3}$ Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm3.  |
| 1.31Ein Pyramidenstumpf setzt sich zusammen aus 4 Teilpyramiden, 4 Keilen und einer quadratischen Säule.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Teilkörper | Quadratische Säule | Keil | Pyramide |
| Skizze |  |  |  |
| Anzahl | 1 | 4 | 4 |
| Volumenformel | $$V\_{S}=b∙b∙h$$ | $$V\_{K}=\frac{1}{2}∙b∙d∙h$$ | $$V\_{P}=\frac{1}{3}∙d∙d∙h$$ |

  |
| 1.32Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe der Volumina der Teilkörper:$$V=4∙V\_{P}+4∙V\_{K}+V\_{S}$$$$V=4∙\left(\frac{1}{3}∙d∙d∙h\right)+4∙\left(\frac{1}{2}∙b∙d∙h\right)+b∙b∙h$$V=$\frac{4}{3}∙d∙d∙h+2∙b∙d∙h+b∙b∙h$$$V=h\left(\frac{4}{3}∙d∙d+2∙b∙d+b∙b\right)$$Es wird mit den allgemeinen Größen weitergerechnet.Es gilt: $2d=a-b oder d=\frac{a-b}{2}$$$V=h∙\left(\frac{4}{3}∙\frac{a-b}{2}∙\frac{a-b}{2}+2∙b∙\frac{a-b}{2}+b∙b\right)$$$$V=h∙\left(\frac{4}{3}∙\frac{a^{2}-2ab+b^{2}}{4}+ab-b^{2}+b^{2}\right)$$$$V=h∙\left(\frac{1}{3}a^{2}-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{3}b^{2}+ab\right)$$$$V=h∙\left(\frac{1}{3}a^{2}+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{3}b^{2}\right)$$$$V=\frac{1}{3}h\left(a^{2}+ab+b^{2}\right)$$  |
| 1.33Kontrolle$$Gegeben:a=10 cm, b=4 cm, h=8 cm$$Rechnung: $$V=\frac{1}{3}h\left(a^{2}+ab+b^{2}\right)$$$$V=\frac{1}{3}∙8 cm∙\left(100 cm^{2}+40 cm^{2}+16 cm^{2}\right)$$$$V=\frac{1}{3}∙8 cm∙156 cm^{2}=416 cm^{3}$$Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm3. |

Gruppe 2:

*Subtraktion des Volumens der Pyramidenspitze von der vollständigen Pyramide an einem Beispiel*

2.1



|  |
| --- |
| 2.21Bestimmung des Volumens des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen$$Gegeben:a=10 cm, b=4 cm, h=8cm$$Rechnung: Bestimmung der Höhe von der Ergänzungspyramide durch Anwendung des Strahlensatzes:$$\frac{x}{x+h}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}⇔\frac{x}{x+h}=\frac{b}{a}$$$$x∙a=\left(x+h\right)∙b⇔xa=xb+hb⇔xa-xb=hb⇔x\left(a-b\right)=hb⇔x=\frac{hb}{a-b}$$x kann jetzt berechnet werden: $x=\frac{8 cm∙4cm}{10 cm-4cm}⇔x=\frac{16}{3} cm$ |
| 2.22$$Gegeben:a=10 cm, b=4 cm, h=8cm, H=\frac{40}{3} cm$$Rechnung: Vg ist das Volumen der großen Pyramide, VE ist das Volumen der Ergänzungspyramide$$V=V\_{g}-V\_{E}$$$$V=\frac{1}{3}\left(10 cm\right)^{2}∙\frac{40}{3} cm-\frac{1}{3}\left(4 cm\right)^{2}∙\frac{16}{3} cm$$$$V=416 cm^{3}$$Antwort: Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm3. |

Gruppe 3

Pyramidenstumpf

(Lösung und Folge der Arbeitskarten)

Herleitung der Formel zur Berechnung des Volumens
durch Subraktion von Pyramidenvolumina

Planfigur:





|  |  |
| --- | --- |
| Berechnung | Tipps für Schüler |
| Schritt 1: Aufstellen einer Formel |
| V1 sei das Volumen der VollpyramideV2 sei das Volumen der ErgänzungspyramideV = V1 – V2 | Das gesuchte Volumen ist gleich der Differenz aus dem Volumen V1 der Vollpyramide und demVolumen V2 der Ergänzungspyramide |
| V =  A1 ( h + x ) –  A2 x | **Arbeitskarte 1.1**Ersetze V1 und V2 mithilfe der Pyramidenformel,rechter Term enthält A1, A2, h und x |
| V =  [ A1 h + A1 x – A2 x ] | **Arbeitskarte 1.2** ausklammern und die runde Klammer ausmultiplizieren |
| V =  [ A1 h + x ( A1 – A2 ) ] | **Arbeitskarte 1.3**x ausklammern |
| Schritt 2: x durch bekannte Größen des Pyramidenstumpfes ersetzen |
| $$\frac{a}{b}=\frac{x+h}{x}$$ | Wende den 2. Strahlensatz an und stelle eine Gleichung mit a, b, h und x auf |
| $$\frac{a^{2}}{b^{2}}=\frac{\left(h+x\right)^{2}}{x^{2}}$$ | **Arbeitskarte 2.1**Quadriere die Gleichung |
| $$\frac{A\_{1}}{A\_{2}}=\frac{\left(h+x\right)^{2}}{x^{2}}$$ | **Arbeitskarte 2.2**Ersetze a2 durch A1 und b2 durch A2 |
| $$\frac{\sqrt{A\_{1}}}{\sqrt{A\_{2}}}=\frac{x+h}{x}$$ | **Arbeitskarte 2.3**Ziehe die Wurzel |
|  | Löse die Gleichung nach x auf |
| $$x\sqrt{A\_{1}}=\left(x+h\right)\sqrt{A\_{2}}$$ | **Arbeitskarte 2.4**Löse die Gleichung nach x auf:Multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner |
| $$x\sqrt{A\_{1}}=x\sqrt{A\_{2}}+h\sqrt{A\_{2}}$$ | **Arbeitskarte 2.5**Löse die Gleichung nach x auf:Löse die Klammern auf (ausmultiplizieren) |
|  $$x\sqrt{A\_{1}}-x\sqrt{A\_{2}}=h\sqrt{A\_{2}}$$ | **Arbeitskarte 2.6**Löse die Gleichung nach x auf:$$-x\sqrt{A\_{2}}$$ |
| $$x\left(\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}\right)=h\sqrt{A\_{2}}$$  | **Arbeitskarte 2.7**x ausklammern |
| $$x=\frac{h\sqrt{A\_{2}}}{\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}}$$ | **Arbeitskarte 2.8**Teile die Gleichung durch $\left(\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}\right)$,da $A\_{1}\ne A\_{2}$ |
| Schritt 3: x durch den neuen Term ersetzen und die Formel umformen |
| V =  [ A1 h + $\frac{h\sqrt{A\_{2}}}{\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}}$ ( A1 – A2 ) ] | Für x den Term  einsetzen |
| $$V=\frac{1}{3}\left[A\_{1}h+\frac{h\sqrt{A\_{2}}}{\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}} \left(\sqrt{A\_{1}}-\sqrt{A\_{2}}\right)\left(\sqrt{A\_{1}}+\sqrt{A\_{2}}\right)\right]$$ | **Arbeitskarte 3.1**3. binomische Formel anwenden um den Nenner zu beseitigen |
| $$V=\frac{1}{3}\left[A\_{1}h+h\sqrt{A\_{2}} \left(\sqrt{A\_{1}}+\sqrt{A\_{2}}\right)\right]$$ | **Arbeitskarte 3.2**Kürzen |
| $$V=\frac{1}{3}\left[A\_{1}h+h\sqrt{A\_{2}}\sqrt{A\_{1}}+h\sqrt{A\_{2}}\sqrt{A\_{2}}\right]$$ | **Arbeitskarte 3.3**Runde Klammer ausmultiplizieren |
| $$V=\frac{1}{3}\left[A\_{1}h+h\sqrt{A\_{2}}\sqrt{A\_{1}}+hA\_{2}\right]$$ | **Arbeitskarte 3.4**Zusammenfassen |
| $$V=\frac{1}{3}h\left[A\_{1}+\sqrt{A\_{2}}\sqrt{A\_{1}}+A\_{2}\right]$$$$V=\frac{1}{3}h\left[A\_{1}+\sqrt{A\_{1}}\sqrt{A\_{2}}+A\_{2}\right]$$ | **Arbeitskarte 3.5**h ausklammern |