Lösungen zum Stationenlernen
Ganzrationale Funktionen – Differentialrechnung

Aufgabe 1:

a) $f(x) = 2 - 3x^3$

Die Funktion ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorliegen.

$f(-a) = 2 - 3(-a)^3 = 2 + 3a^3 \neq f(a) \; und$

$-f(a) = -(2 - 3a^3) = -2 + 3a^3 \neq f(a)$

Verhalten im Unendlichen:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad und \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b) $f(x) = 4x^2 - \sqrt{5}x^8 + 9$

Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten vorliegen.

$f(-a) = 4(-a)^2 - \sqrt{5}(-a)^8 + 9 = 4a^2 - \sqrt{5}a^8 + 9 = f(a)$

Verhalten im Unendlichen:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad und \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = 3x + 0,4x^3$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da nur ungerade Exponenten vorliegen.

$f(-a) = 3(-a) + 0,4(-a)^3 = -3a - 0,4a^3 = -f(a)$

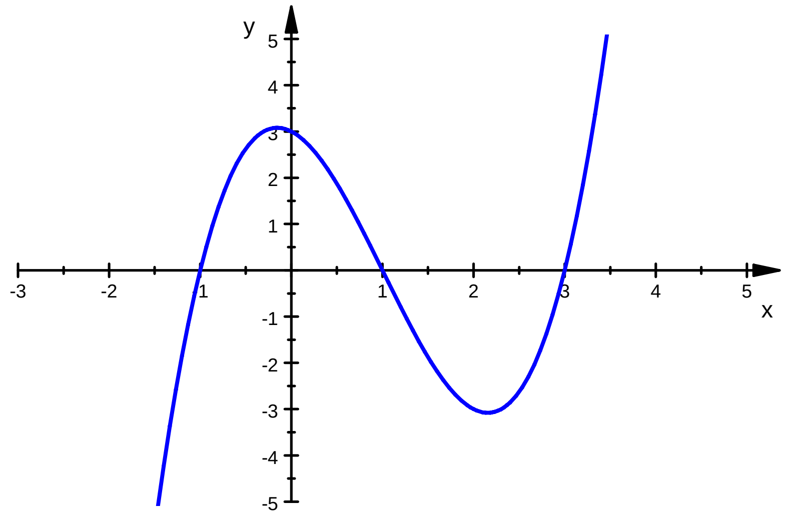
Verhalten im Unendlichen:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad und \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

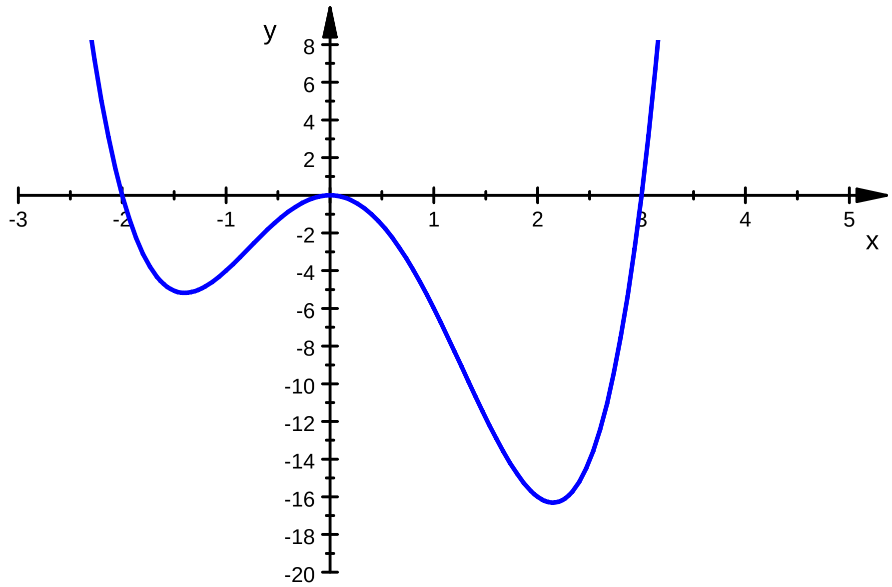
Station 2: **Skizzierung von Graphen**

Beispiele für den Verlauf der Graphen. Die exakten Hoch- und Tiefpunkte können basierend auf der Aufgabenstellung noch nicht bestimmt werden.

a)



b)



Station 3: **Nullstellenbestimmung**

a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

Bedingung: $f(x) = 0$

1. geratene Nullstelle x_1 = -1 N_1 (-1 | 0)

$$(-x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x+1) = -x^2 + 3x - 2$$
$$\underline{-(-x^3 - x^2\ )}$$
$$3x^2 + x$$
$$\underline{-\left(3x^2 + 3x\right)}$$
$$-2x - 2$$
$$\underline{-\left(-2x - 2\right)}$$
$$0$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$(-1)\cdot(x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$p = -3,\quad q = 2$$
$$x_{2,3} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2}$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 1$$

Also: N_1 (-1 | 0), N_2 (1 | 0) und N_3 (2 | 0)

b) $f(u) = u^3 - 2u^2 - 8u$

Bedingung:

$$f(u) = 0$$
$$u^3 - 2u^2 - 8u = 0$$
$$u \cdot (u^2 - 2u - 8) = 0$$
$$u_1 = 0 \text{ oder } u^2 - 2u - 8 = 0 \qquad N_1(0|0)$$
$$u^2 - 2u - 8 = 0$$
$$p = -2,\ q = -8$$
$$u_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 8}$$
$$u_2 = 4 \qquad N_2(4|0)$$
$$u_3 = -2 \qquad N_3(-2|0)$$

c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Bedingung:

$$f(x) = 0$$
$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \qquad \textit{Substitution}:\ x^2 = z$$

Also:

$$z^2 - 13z + 36 = 0$$
$$p = -13,\quad q = 36$$
$$z_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36}$$
$$z_1 = 9 \qquad \textit{also} \quad x_1 = +\sqrt{9} = 3 \quad \textit{und} \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3$$
$$z_2 = 4 \qquad \textit{also} \quad x_3 = +\sqrt{4} = 2 \quad \textit{und} \quad x_4 = -\sqrt{4} = -2$$

Und damit erhält man:

$N_1(3|0),\ N_2(-3|0),\ N_3(2|0)$ und $N_4(-2|0)$

d) Bedingung:

$$g(r) = 0$$

$$r^6 - 19r^3 - 216 = 0$$

$Substitution: \quad r^3 = z$

$$g(z) = z^2 - 19z - 216 = 0$$

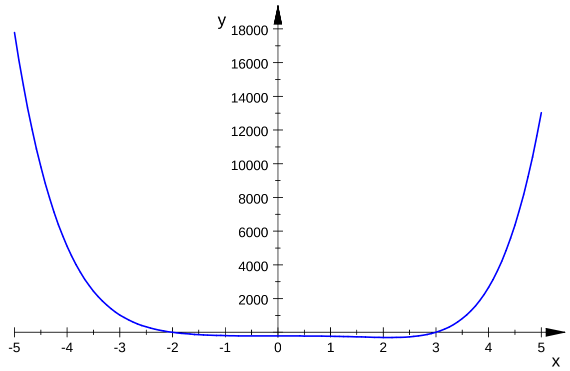
$$p = -19 \qquad q = -216$$

$$z_{1,2} = \frac{19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right) + 216}$$

$$z_1 = 27 \qquad\qquad x_1 = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$z_2 = -8 \qquad\qquad x_2 = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$N_1(3|0) \; und \; N_2(-2|0)$



Station 4: Graphenpuzzle – Wer gehört zu wem?

Lösungen:

A2, B4, C1, D3, E5, F8, G11, H6, I10, J9, K12, L7 bzw.

1C 2A 3D 4B 5E 6H 7L 8F 9J 10I 1G 12K

Station 5: Bestimmung der Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten

a)

$$f(x) = 4x^3$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - 4\cdot 2^3}{x-3} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - 32}{x-3} = \lim_{x\to 2} 4x^2 + 8x + 16 = 4\cdot 2^2 + 8\cdot 2 + 16 = 48$$

Nebenrechnung :

$$(4x^3 - 32) : (x-2) = 4x^2 + 8x + 16$$

$$\underline{-(4x^3 - 8x^2)}$$

$$8x^2 - 32$$

$$\underline{-\left(8x^2 - 16x\right)}$$

$$16x - 32$$

$$\underline{-\left(16x - 32\right)}$$

$$0$$

b)

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 4x$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{3}{4}x^2 + 4x\right) - 4\frac{3}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4\frac{3}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + 4\frac{3}{4} = 5\frac{1}{2}$$

Nebenrechnung :

$$(\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4\frac{3}{4}) : (x-1) = \frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$$

$$\underline{-(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x)}$$

$$4\frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$$

$$\underline{-\left(4\frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}\right)}$$

$$0$$

Station 6: Bestimmung der Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten

a)

$$f(x) = 4x^3$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{4x^3-4a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{4\cdot(x^3-a^3)}{x-a} = \lim_{x\to a}4\cdot(x^2+2ax+a^2) = 4\cdot(a^2+2\cdot a^2+a^2) = 4\cdot 3a^2 = 12a^2$$

b)

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2+4x$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{3}{4}x^2+4x\right)-\left(\frac{3}{4}a^2+4a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}a^2+4x-4a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{3}{4}\left(x^2-a^2\right)+4\left(x-a\right)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{3}{4}\left(x+a\right)+4 = \frac{3}{4}\cdot 2a+4 = \frac{3}{2}a$$

Station 7: Bestimmung der Ableitung

$a)\quad f(x) = x^3+x^4$

$f'(x) = 3x^2+4x^3$

$b)\quad f(x) = -4x^3+2x$

$f'(x) = -12x^2+2$

$c)\quad f(x) = \frac{3}{4}x^8-3x^2$

$f'(x) = 6x^7-6x$

$d)\quad f(x) = 2x^3+4x^2-3x+5$

$f'(x) = 6x^2+8x-3$

$e)\quad f(x) = -3x^6+\frac{3}{8}x^8+\frac{5}{3}x-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$f'(x) = -18x^5+3x^7+\frac{5}{3}-\frac{1}{4\cdot\sqrt{x}}$

$f)\quad f(x) = \frac{3}{7}x^3-\frac{2}{x}$

$f'(x) = \frac{9}{7}x^2+\frac{2}{x^2}$

Station 8: Gleichung der Tangente

Bestimmung der Steigung $m_t = f'(x_0)$ der Tangente t:

$$m_t(x_0) = f'(x_0) = \frac{1}{5}\cdot 2\cdot x_0 = \frac{2}{5}x_0$$

$$m_t(3) = f'(3) = \frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{6}{5}$$

Herleitung der Gleichung der Tangente t mit der Punkt – Steigungs – Formel:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-\frac{9}{5} = \frac{6}{5}(x-3)$$

$$y = \frac{6}{5}x-1\frac{4}{5}$$

Bestimmung der Steigung n_t der Normalen: $n_t = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$

Herleitung der Gleichung der Normalen n mit der Punkt – Steigungs – Formel:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{9}{5} = -\frac{5}{6}(x - 3)$$
$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{15}{6} + \frac{9}{5}$$
$$y = -\frac{5}{6}x + 4\frac{3}{10}$$

Station 9: Beweis der Faktorregel

Gegeben: $f(x) = c \cdot g(x)$

Behauptung: $f'(a) = c \cdot g'(a)$

Beweis:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{c \cdot g(x) - c \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{c \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= c \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= c \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Station 10: Beweis der Summenregel

Gegeben: $f(x) = g(x) + h(x)$

Behauptung: $f'(a) = g'(a) + h'(a)$

Beweis:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\left(g(x) + h(x)\right) - \left(g(a) + h(a)\right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(g(x) - g(a)) + (h(x) - h(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \\ &= g'(a) + h'(a) \end{aligned}$$