Problemlösen lernen im Mathematikunterricht

Heuristische Strategien und Hilfsmittel in der Grundschule

17.03.2008

Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

Ziel dieser Fortbildung:

- Problemhaltige Aufgaben kennen lernen, die für die Grundschule geeignet sind.
- Heuristische Strategien und Hilfsmittel kennen lernen und anwenden, die zum Problemlösen nötig und in der Grundschule relevant sind.
- Eine Möglichkeit kennen lernen, heuristische Strategien und Hilfsmittel mit Schülern gezielt zu trainieren.

Problemlösen

ist eine der fünf geforderten allgemeinen Kompetenzen in den Bildungsstandards am Ende der Jahrgangsstufe 4.

Problemlösen heißt konkret:

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung von problemhaltigen Aufgaben anwenden,
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (Heuristik),
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.

Der Begriff „Heuristik“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Entdeckung“.

Heuristische Strategien und heuristische Hilfsmittel helfen die Lösung einer Aufgabe oder eines Problems zu entdecken.

Sie haben sie wahrscheinlich alle, ohne es zu wissen, schon angewendet.

Textaufgaben

Sachaufgaben

- eindeutiges Rechenschema
- genau eine richtige Lösung
- Rechenverfahren voraussehbar

Problemhaltige Aufgaben

- kein eindeutiges Rechenverfahren in d. G.
- nicht immer eine eindeutige Lösung
- Vielzahl von Strategien

Busplatzaufgabe

In einem Bus ist ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt. 6 Plätze mehr werden durch Erwachsene belegt. 9 Plätze bleiben frei.
Wie viele Plätze hat der Bus?
Beschreibe deinen Lösungsweg.

(nach: Bruder,R.:Heureka-Problemlösen lernen)

Nüsseaufgabe

In jeder von fünf Körben befindet sich genau die gleiche Anzahl von Nüssen. Entnimmt man jedem Korb 60 Nüsse, bleiben in den Körben insgesamt so viele Nüsse übrig, wie vorher in zwei Körben waren.
Wie viele Nüsse waren vorher insgesamt in den Körben?
Beschreibe deinen Lösungsweg.

(verändert nach: Bruder,R.:Heureka-Problemlösen lernen)

Wie sind Sie vorgegangen?

Strategien:

- Ausprobieren (ungeordnet, geordnet)
- Vorwärtsarbeiten

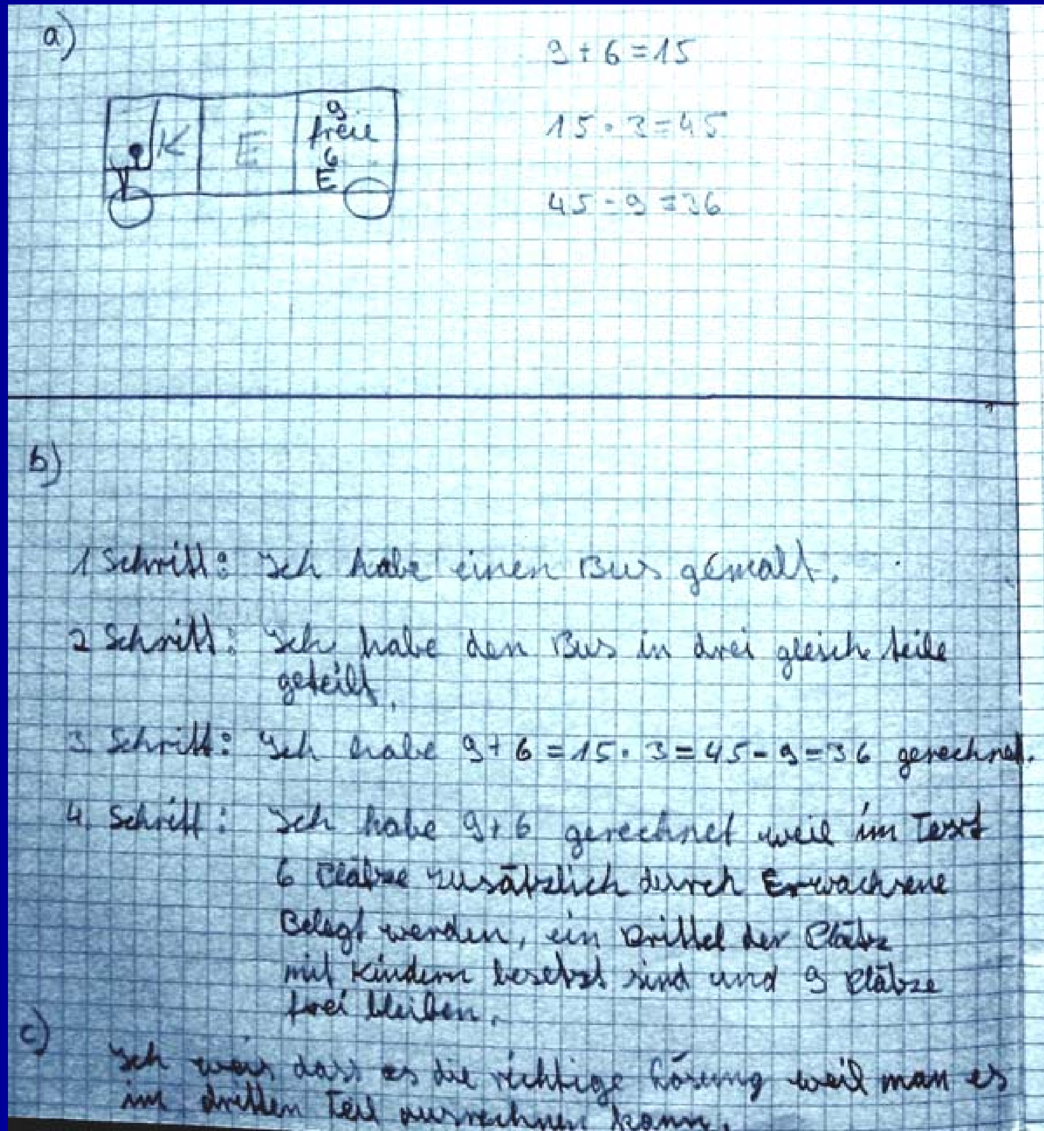
Hilfsmittel:

- Zeichnung oder Skizze (informative Figur)
- Strukturierte Textdarstellung
- Tabelle
- Gleichung

Zeichnung

oder Skizze

(Informative Figur)



a)

9 + 6 = 15

15 · 3 = 45

45 − 9 = 36

K E 9 freie 6 E

b)

1 Schritt: Ich habe einen Bus gemalt.

2 Schritt: Ich habe den Bus in drei gleiche teile geteilt.

3. Schritt: Ich habe 9 + 6 = 15 · 3 = 45 − 9 = 36 gerechnet.

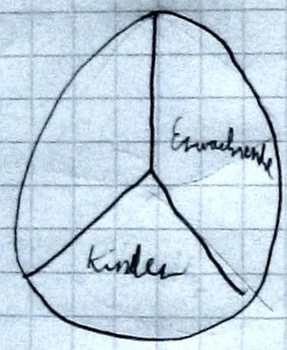
4. Schritt: Ich habe 9 + 6 gerechnet weil im Text 6 Plätze zusätzlich durch Erwachsene Belegt werden, ein Drittel der Plätze mit Kindern besetzt sind und 9 Plätze frei bleiben.

c)

Ich weiß dass es die richtige Lösung weil man es im dritten Teil ausrechnen kann.

Zeichnung oder Skizze

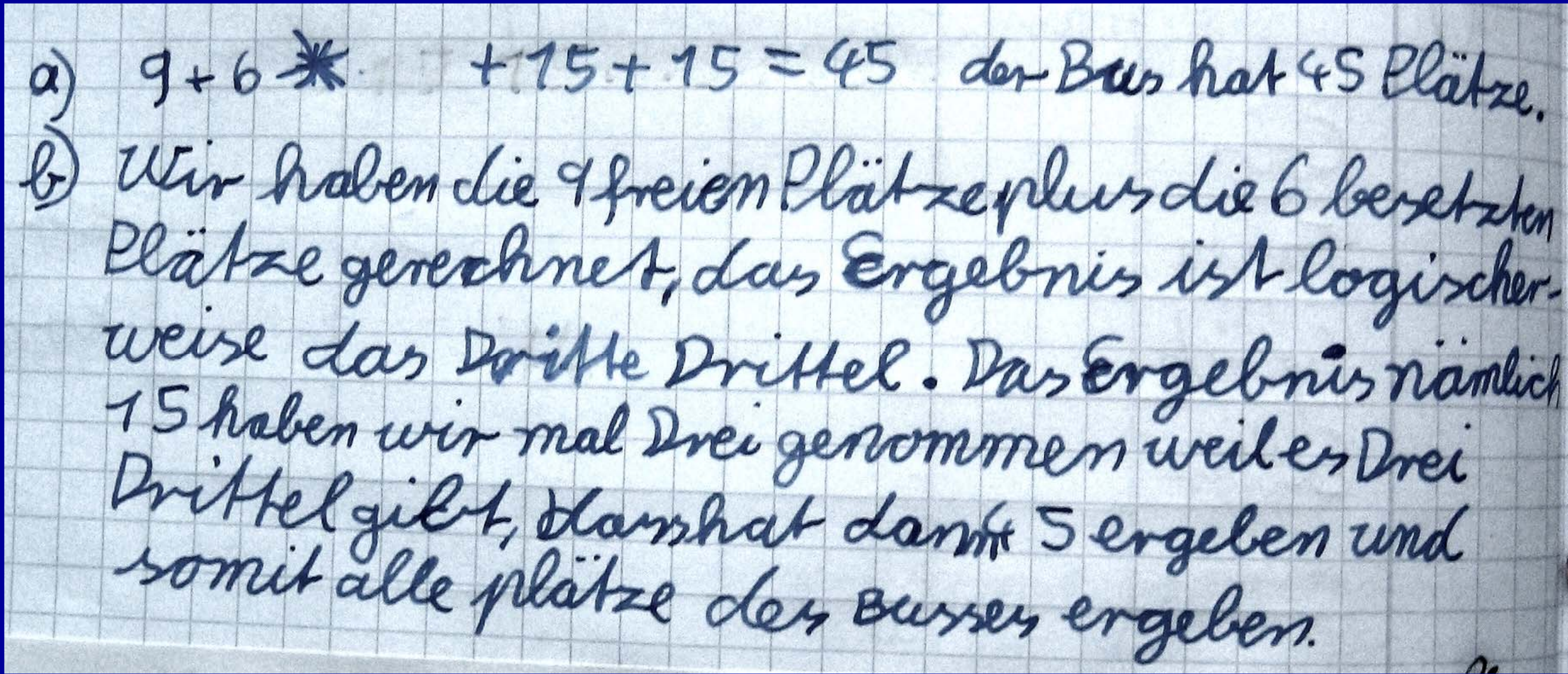
Der Bus hat 45 Plätze



$6 + 9 = 15 \qquad 15 \cdot 3 = 45$

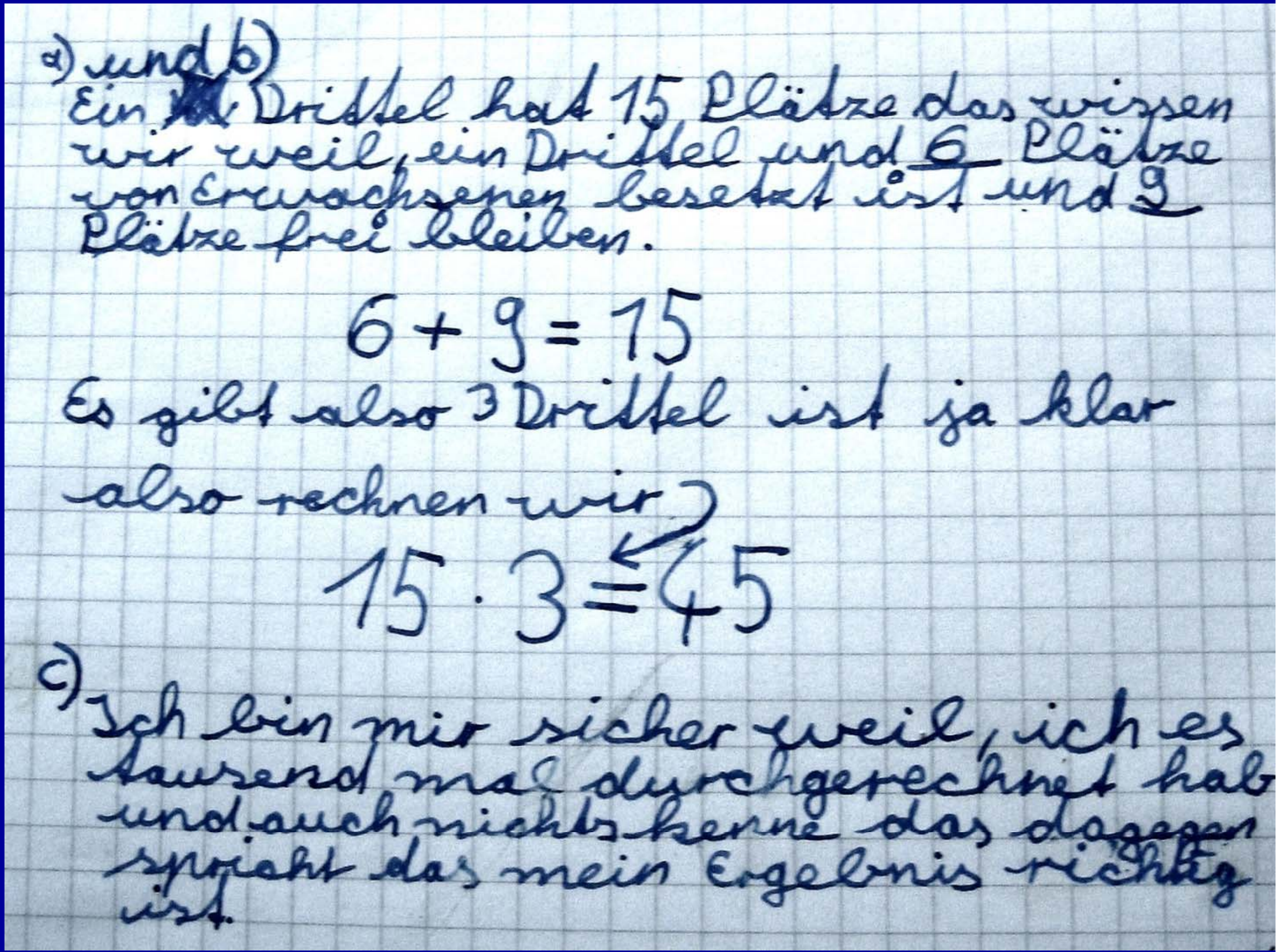
Also oben auf der Aufgabe steht ja ein Drittel, und die
Erwachsenen brauchen ja 6 plätze mehr und 9 Platze bleiben übrig
das heißt ja ein Drittel ist diese zwei Zahl also $6 + 9 = 15$
dan hab 15 das wer 1 Drittel ein Drittel ist ja ein Teil von 3 deswegen
rechne ich $3 \cdot 15 = 45$ so das ist das Ergebnis.

Strukturierte Textdarstellung



a) 9+6 * +15+15=45 der Bus hat 45 Plätze.
b) Wir haben die 9 freien Plätze plus die 6 besetzten
Plätze gerechnet, das Ergebnis ist logischer-
weise das ~~Dritte~~ Drittel. Das Ergebnis nämlich
15 haben wir mal Drei genommen weil es Drei
Drittel gibt, das hat dann 5 ergeben und
somit alle plätze des Busses ergeben.

Strukturierte Textdarstellung


a) und b)
Ein Drittel hat 15 Plätze das wissen wir weil, ein Drittel und 6 Plätze von Erwachsenen besetzt ist und 9 Plätze frei bleiben.

$6 + 9 = 15$

Es gibt also 3 Drittel ist ja klar

also rechnen wir

$15 \cdot 3 = 45$

c) Ich bin mir sicher weil, ich es tausend mal durchgerechnet hab und auch nichts kenne das dagegen spricht das mein Ergebnis richtig ist.

Tabelle anlegen

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch
Gedachte Gesamtzahl	30	60	45
Kinder	10	20	15
Erwachsene	16	26	21
Frei	9	9	9
Gesamt?	35	55	45
	Zu wenig gedacht	Zu viel gedacht	

Gleichung:

$$\frac{1}{3}x + \left[\frac{1}{3}x + 6\right] + 9 = x \qquad / \cdot 3$$

$$x + [x + 18] + 27 = 3x$$

$$2x + 45 = 3x \qquad /-2x$$

$$45 = x$$

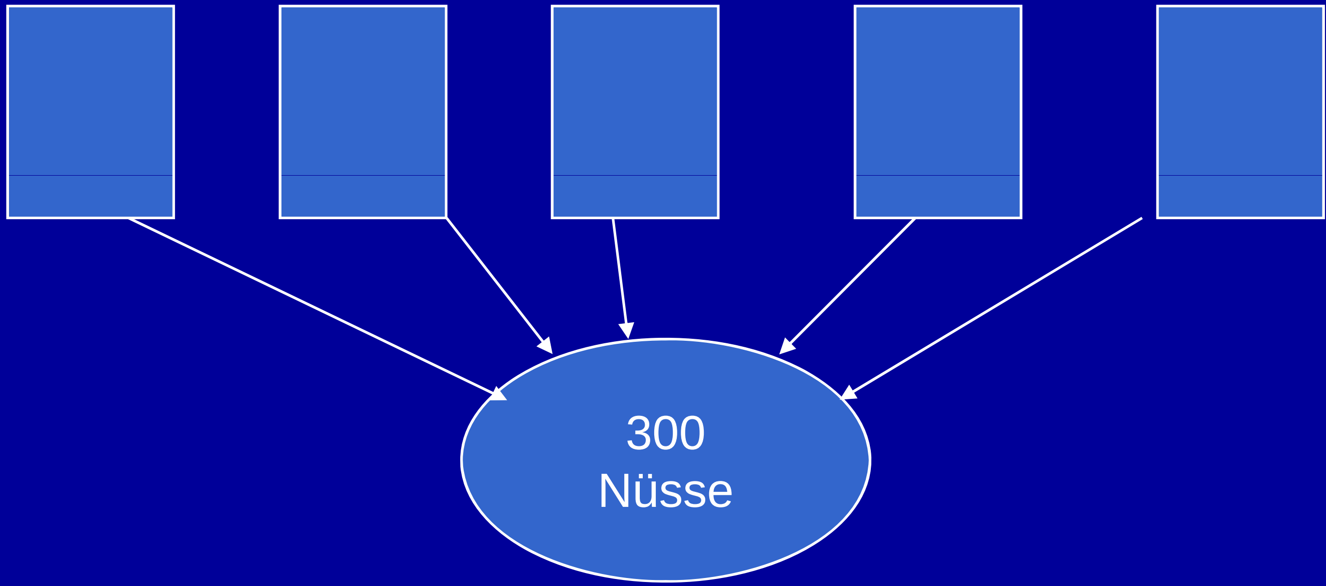
Insgesamt also 45 Sitzplätze.

Probieren
Tabelle

Wie viele Nüsse vorher waren	minus 60	mal fünf	Wie viele vorher in zwei Körben waren
90	30	150	180
95	35	175	190
94	34	170	188
91	31	155	182
100	40	200	200

a) 500

Probieren
Tabelle



Wenn jetzt insgesamt so viele übrig bleiben, wie vorher in zwei Körben waren, müssen die 300 in den anderen 3 Körben gewesen sein, also 300:3= 100 in jedem Korb.

Insgesamt sind es also 500 Nüsse gewesen.

$5\,(x-60) = 2x$

$5x - 300 = 2x \quad /{+300}$

$5x = 2x + 300 \quad /{-2x}$

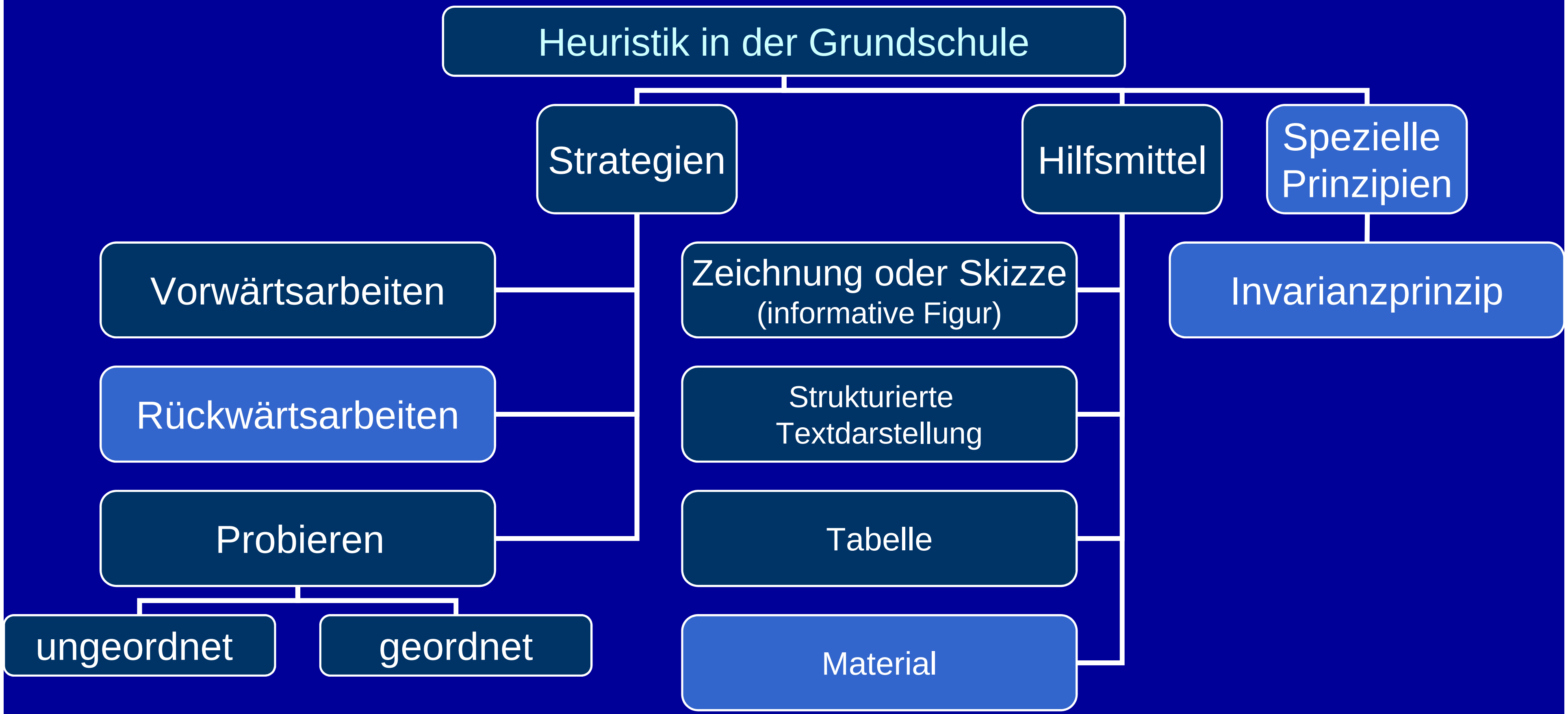
$3x = 300$

$x = 100$

In einer Kiste sind 100 Nüsse, in 5 Körben also 500 Nüsse.

Was hilft uns, eine Aufgaben oder ein Problem zu lösen?

- Unbefangenes neugieriges und zielgerichtetes Fragen
- Lernen, geeignete Fragen zu stellen
- Informationen aus dem Text entnehmen
- Reflektion über gelungene Lösungen
- Eine Auswahl an Strategien und Hilfsmitteln zur Verfügung zu haben


Heuristik in der Grundschule
Strategien
Hilfsmittel
Spezielle Prinzipien
Vorwärtsarbeiten
Rückwärtsarbeiten
Probieren
ungeordnet
geordnet
Zeichnung oder Skizze
(informative Figur)
Strukturierte Textdarstellung
Tabelle
Material
Invarianzprinzip

Äpfel und Tore

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht eine Wächterin und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele hatte er am Anfang? Beschreibe deinen Lösungsweg.

(nach: Bruder, R.: Heureka-Problemlösen lernen)

Fußballsticker

Leon sammelt eine Woche lang jeden Tag die gleiche Anzahl von Fußballstickern. Am Ende der Woche gibt ihm sein Freund Max 7 weitere Sticker, und Leon schenkt Max 5 von seinen Stickern. Danach schenkt Leon die Hälfte seiner Sticker seinem Bruder und hat am Schluss noch 22 Sticker übrig.

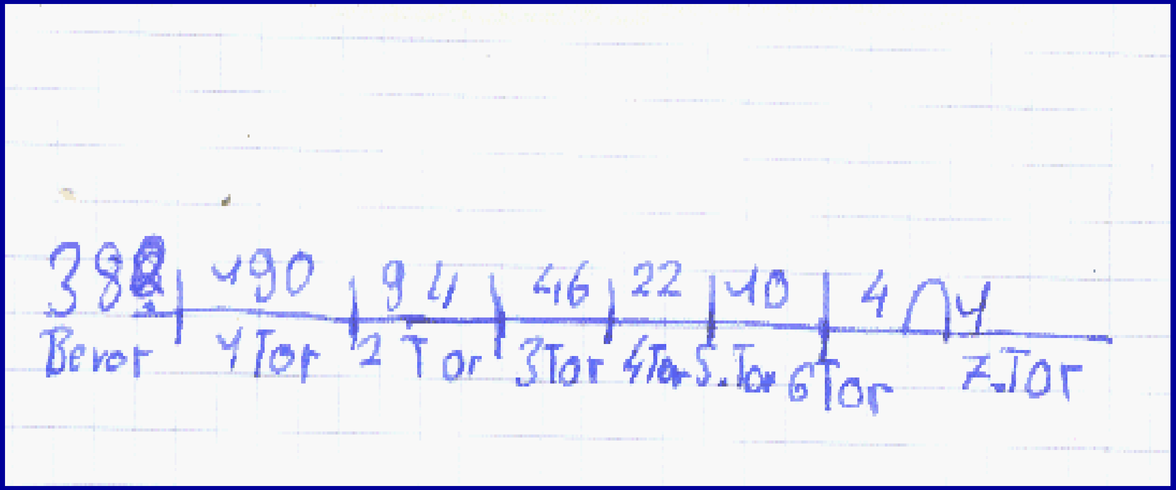
Wie viele Sticker hat Leon eine Woche lang jeden Tag gesammelt?Beschreibe deinen Lösungsweg.

(nach: Wilkinson, M.: Denksportaufgaben aus dem Alltag)

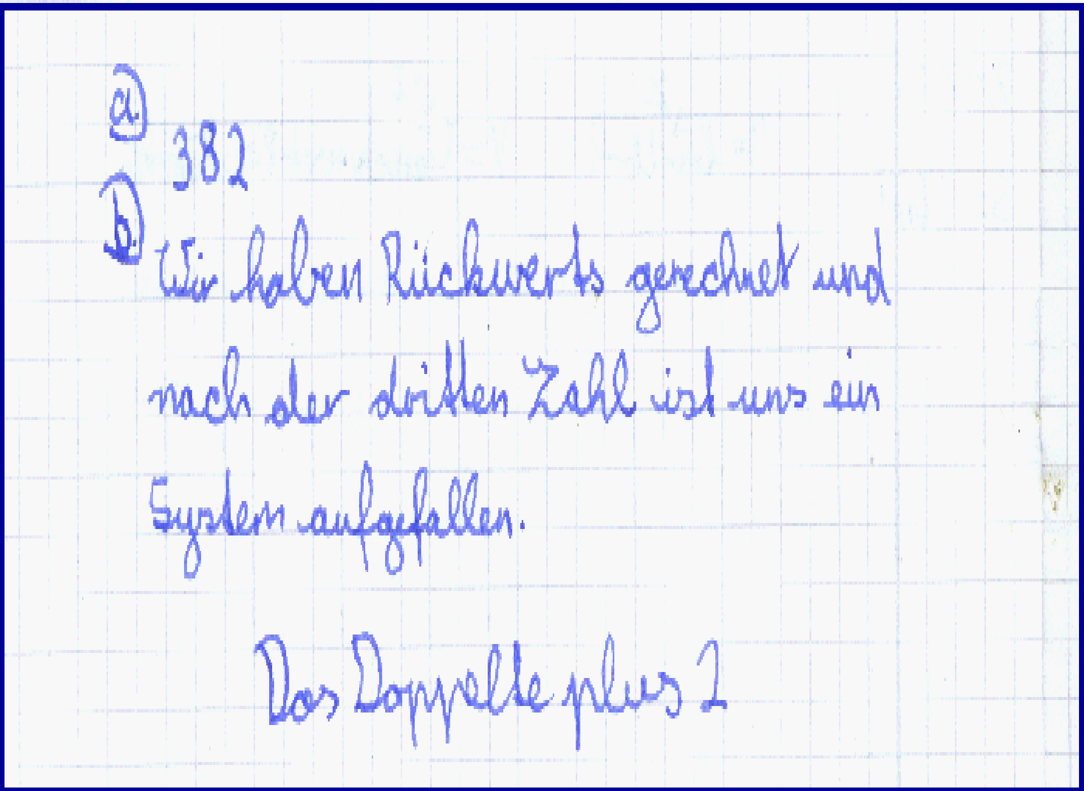
Strategie Rückwärtsarbeiten

- Was ist gesucht?
- Was weiß ich über das Gesuchte?
- Was benötige ich um das Gesuchte zu ermitteln?

Zeichnung



Strukturierte Textdarstellung

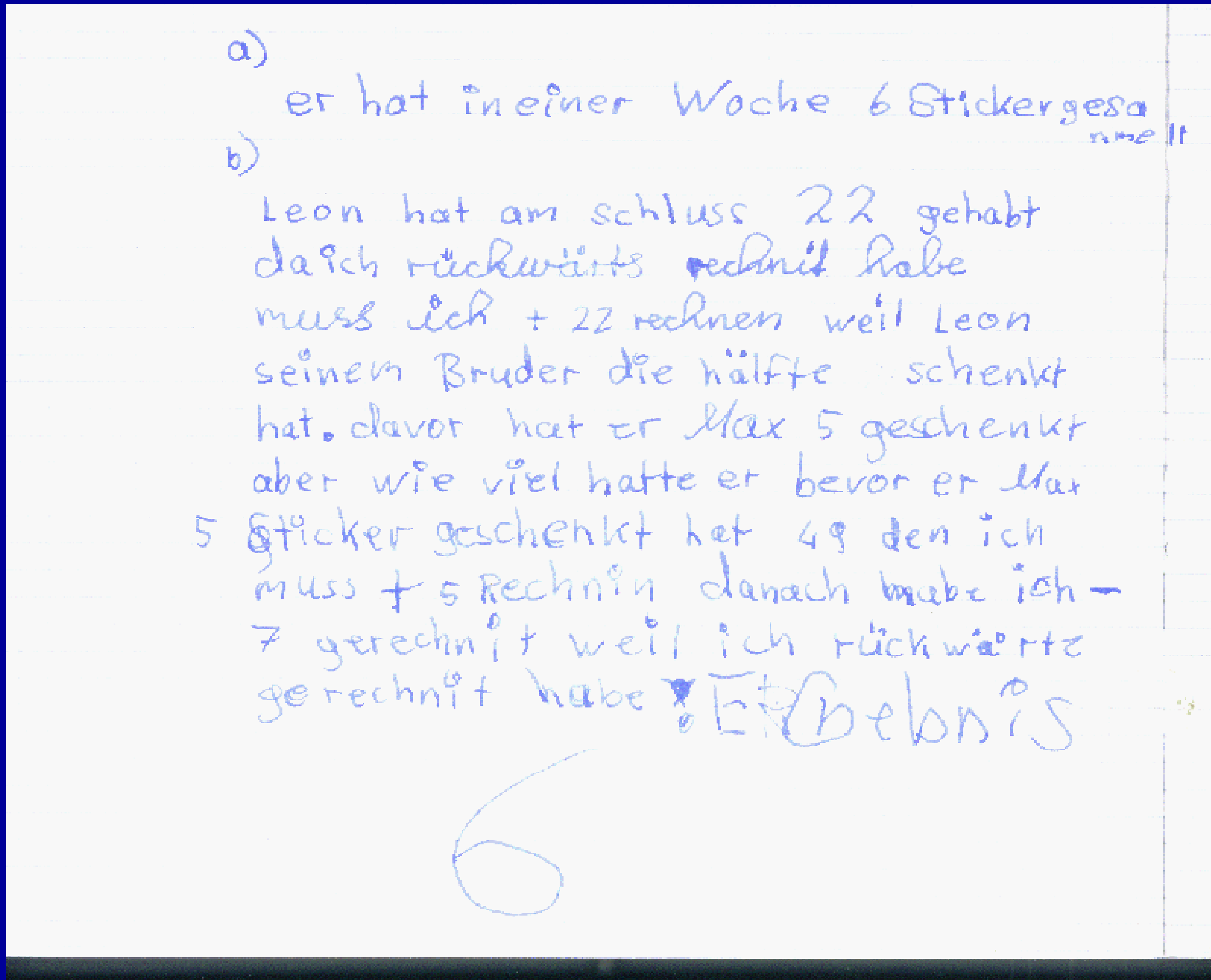


Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

Strategie: Rückwärtsarbeiten
Hilfsmittel: Tabelle

	Nach dem Tor	Vor dem Tor
7. Tor	1	4
6. Tor	4	10
5. Tor	10	22
4. Tor	22	46
3. Tor	46	94
2. Tor	94	190
1. Tor	190	382

Rückwärts arbeiten


a)
er hat in einer Woche 6 Sticker gesammelt
b)
Leon hat am schluss 22 gehabt
da ich rückwärts rechnit habe
muss ich + 22 rechnen weil Leon
seinem Bruder die hälfte schenkt
hat. davor hat er Max 5 geschenkt
aber wie viel hatte er bevor er Max
5 Sticker geschenkt het 49 den ich
muss + 5 Rechnin danach habe ich −
7 gerechnit weil ich rückwärtz
gerechnit habe ! Ergebnis
6

Rückwärts arbeiten

Schülerbeispiel 4. Klasse

a.) Er hat 6 jeden Tag gesammelt.

b.) Wir haben erstmal das doppelte von 22 genommen = 44 dann schenkt Leon fünf Sticker Max = 49 deswegen dachten wir 7 sei die Lösung*. Das war aber zu viel, also haben wir es mit 6 probiert.

* (weil wir die sieben Sticker von Max ignoriert haben)

Strategie: Rückwärtsarbeiten

Leon bleiben 22 Sticker übrig:	22
Die Hälfte bekam sein Bruder, also:	$22 \cdot 2 = 44$
5 werden addiert für die Anzahl, die Max bekommt:	$44 + 5 = 49$
7 subtrahiert, für die Anzahl, die Max ihm schenkt:	$49 - 7 = 42$
Dividiert durch 7 für die Anzahl der Wochentage:	$42 : 7 = 6$

Leon hat eine Woche lang jeden Tag 6 Sticker gesammelt.

Aufgaben aus dem kombinatorischem Bereich sind eine besondere Herausforderung, weil es hier Faktoren gibt, die das Finden der Lösungen erschweren.

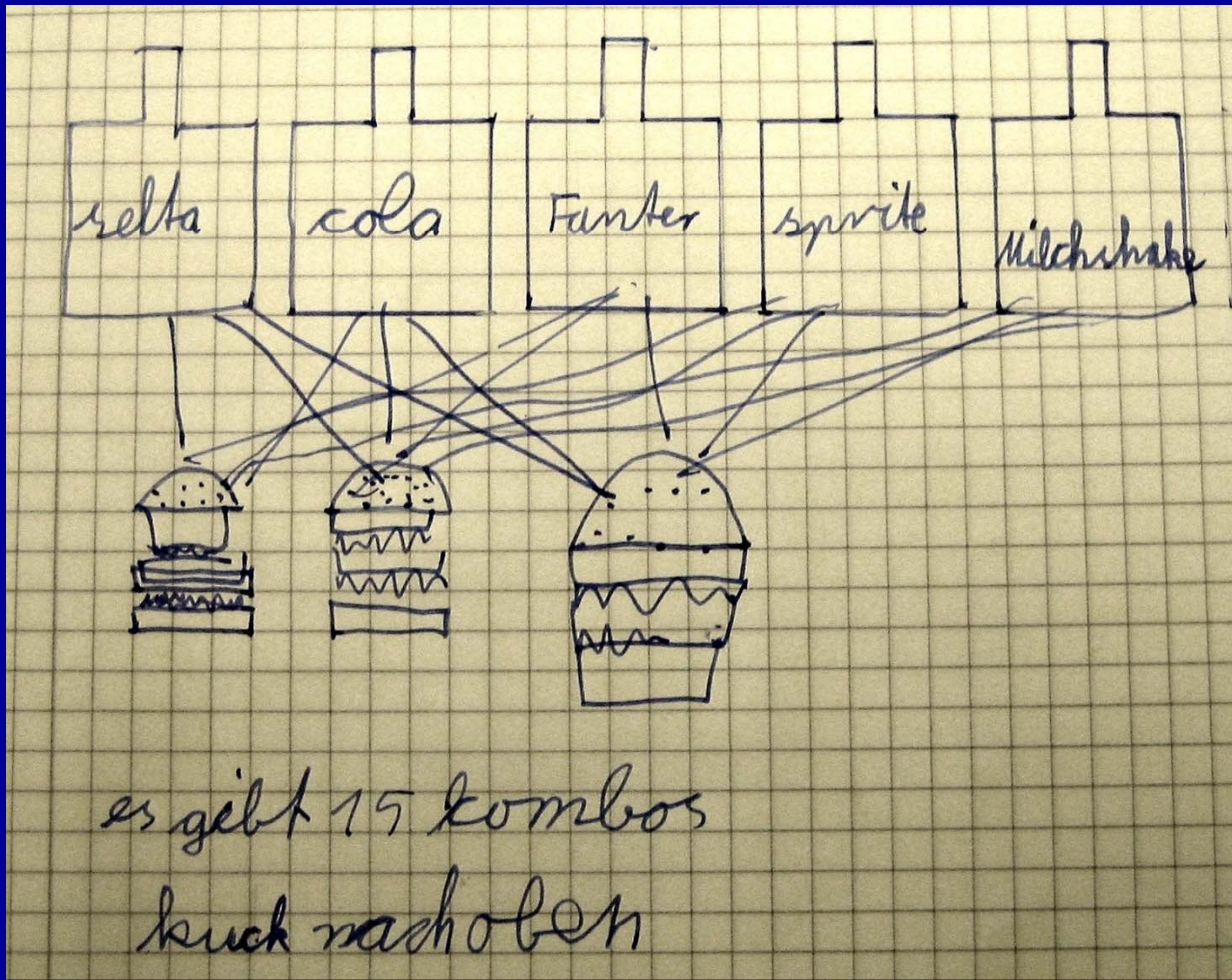
Aktionswoche

Ein Schnellrestaurant hat eine Angebotswoche:
es bietet einen Burger und ein Getränk zu einem besonders günstigen Preis an. Es gibt drei Arten von Burger zur Auswahl: Hamburger, Chicken-Burger und Salatburger und fünf Getränke: Cola, Sprite, Fanta, O-Saft und Milchshake.
Welche Kombinationsmöglichkeiten gibt es?
Beschreibe deinen Lösungsweg.

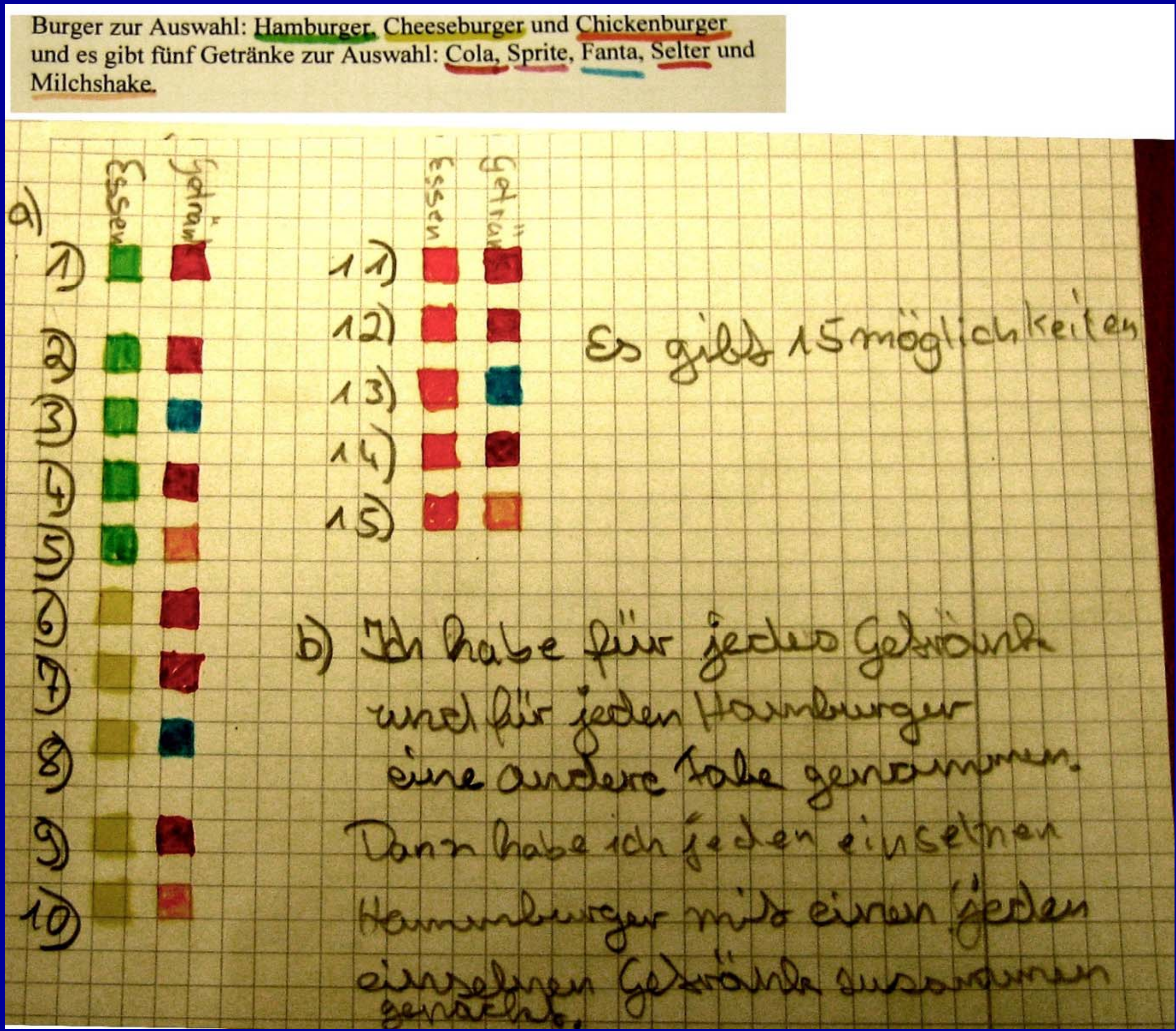
Zusatzaufgabe:
Das Schnellrestaurant bietet zusätzlich zwei verschiedene Saucen für die Burger an: Tomatensoße und Barbecuesauce.
Anschließend kann man noch zwischen drei verschiedenen Nachspeisen (Eisbecher, Obstsalat und Pudding) wählen.
Welche Kombinationsmöglichkeiten von Burger, Getränken, Saucen und Nachspeisen gibt es?

(verändert aus: Wilkinson, Mike: Denksportaufgaben aus dem Alltag 5./6.Klasse)

Zeichnung
oder Skizze
(Informative Figur)



Geordnete Aufstellung



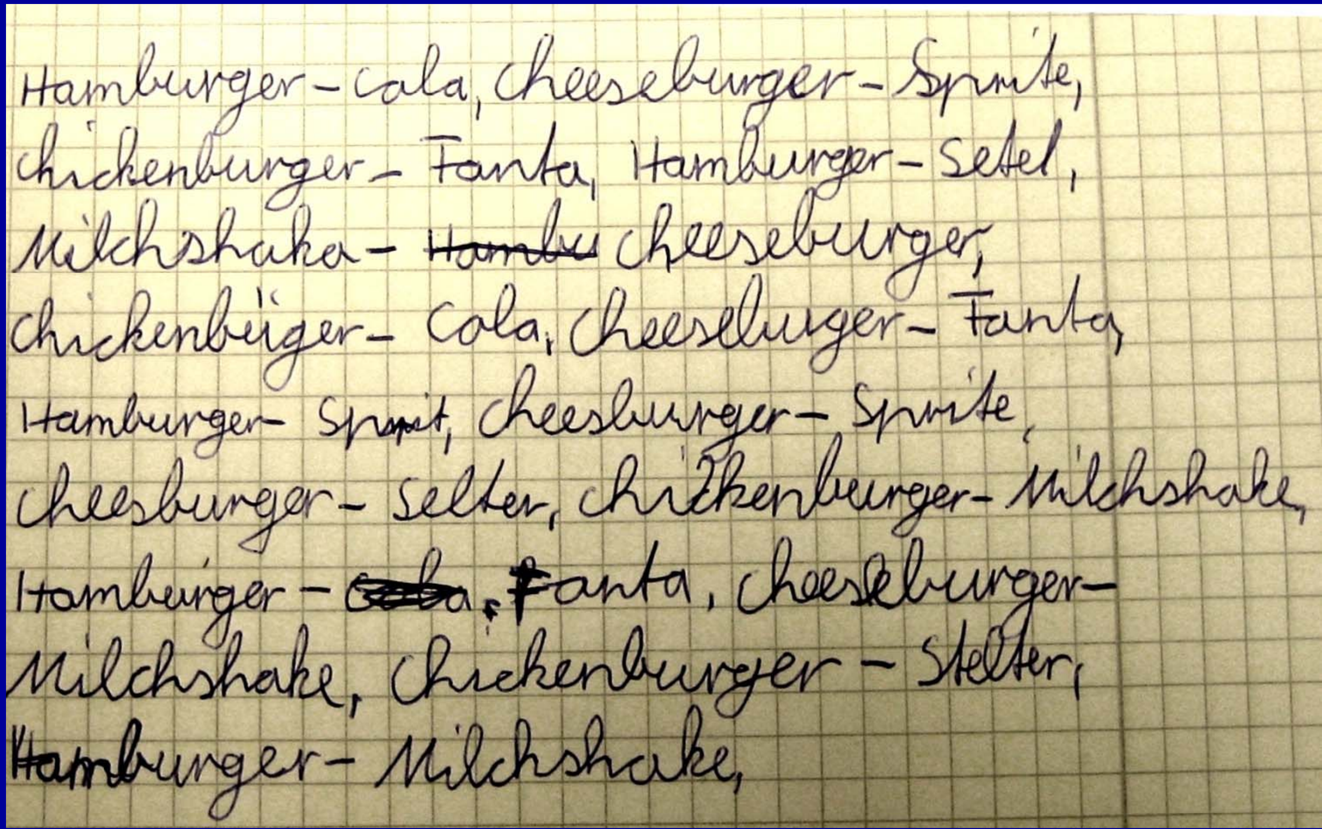
Geordnete Aufstellung

	Essen	Trinken
1	Hamburger	Cola
2	Hamburger	Sprite
3	Hamburger	Fanta
4	Hamburger	Selta
5	Hamburger	Milchshake
6	Cheeseburger	Cola
7	Cheeseburger	Sprite
8	Cheeseburger	Fanta
9	Cheeseburger	Selta
10	Cheeseburger	Milchshake
11	Chickenburger	Cola
12	Chickenburger	Sprite
13	Chickenburger	Fanta
14	Chickenburger	Selta
15	Chickenburger	Milchshake

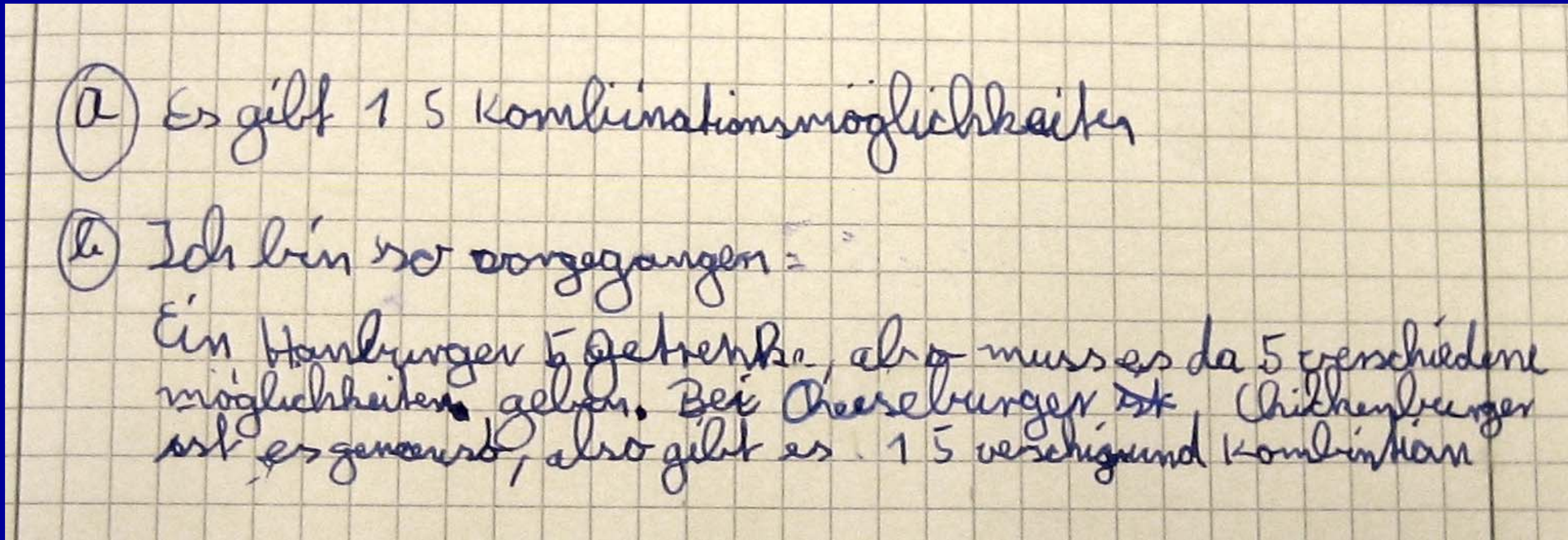
Wir haben Hamburger 5x
Cheeseburger 5x
Chickenburger 5x

$3 \cdot 5 = 15$

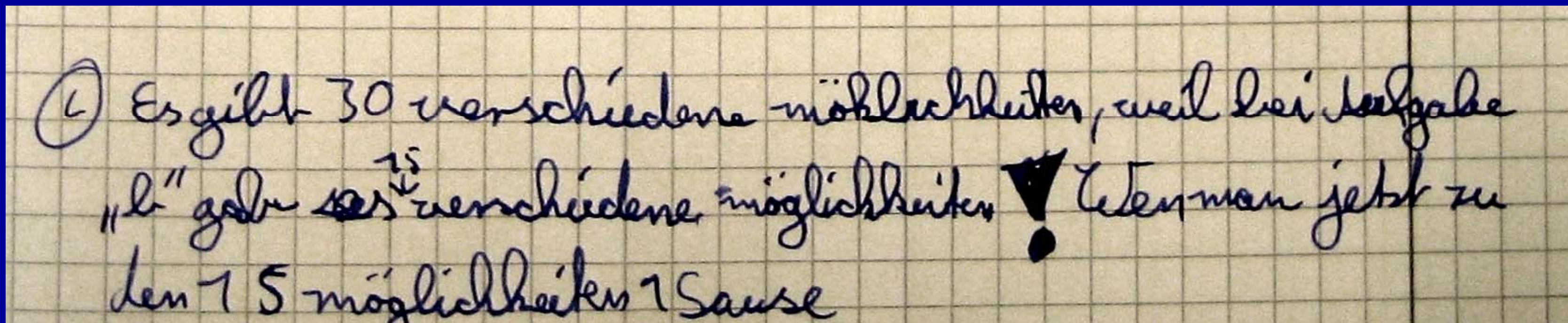
ungeordnete Aufstellung


Hamburger – cola, cheeseburger – Sprite,
chickenburger – Fanta, Hamburger – Setel,
Milchshake – ~~Hambu~~ cheeseburger,
chickenbürger – Cola, cheeselburger – Fanta,
Hamburger – Sprit, cheesburger – Sprite,
cheesburger – selter, chikenburger – milchshake,
Hamburger – ~~cola~~, Fanta, cheeseburger –
Milchshake, Chickenburger – Stelter,
Hamburger – Milchshake,

Strukturierte Textdarstellung


a) Es gibt 15 Kombinationsmöglichkeiten

b) Ich bin so vorgegangen:
Ein Hamburger 5 Getränke, also muss es da 5 verschiedene möglichkeiten geben. Bei Cheeseburger ~~ist~~, Chickenburger ist es genauso, also gibt es 15 verschigund Kombintion


c) Es gibt 30 verschiedene möklichkeiten, weil bei Aufgabe „b" gab ~~es~~ 15 verschiedene möglichkeiten! Wenn man jetzt zu den 15 möglichkeiten 1 Sause

Heuristische Strategien und Hilfsmittel in der Grundschule

Hamburger 1 + Getränk 1
es gibt aber nicht nur einen Hamburger sondern insgesamt 3

$$\left\{\begin{matrix}\text{Hamburger 1}\\ \text{Hamburger 2}\\ \text{Hamburger 3}\end{matrix}\right\} \quad + \quad \text{Getränk 1}$$

Das heißt es gibt in dem Fall 3 Möglichkeiten, da es 3 Hamburger gibt.

Aber es gibt ja mehr Getränke.

$$\left\{\begin{matrix}\text{Hamburger 1}\\ \text{Hamburger 2}\\ \text{Hamburger 3}\end{matrix}\right\} \quad + \quad \left\{\begin{matrix}\text{Getränk 1}\\ \text{Getränk 2}\\ \text{Getränk 3}\\ \text{Getränk 4}\\ \text{Getränk 5}\end{matrix}\right\}$$

Das heißt es gibt nicht 3, sondern 3 · 5 Möglichkeiten = 15 Möglichkeiten.

Kombiniert man das mit den Soßen und den Desserts:

$$\begin{pmatrix}\text{Hamburger 1}\\ \text{Hamburger 2}\\ \text{Hamburger 3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Getränk 1}\\ \text{Getränk 2}\\ \text{Getränk 3}\\ \text{Getränk 4}\\ \text{Getränk 5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Soße 1}\\ \text{Soße 2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Dessert 1}\\ \text{Dessert 2}\\ \text{Dessert 3}\end{pmatrix}$$

Jetzt gibt es 3 · 5 · 2 · 3 Möglichkeiten
(Hamburger) · (Getränk) · (Soße) · (Dessert) = 90 Möglichkeiten

Um die Kombinationsmöglichkeiten auszurechnen, müssen die unterschiedlichen Anzahlen miteinander multipliziert werden.

Aufgaben ähnlicher Struktur wären Aufgaben, wie die Kombinationsmöglichkeiten von verschiedenen T-Shirts, Hosen und Strümpfen.

Lieblingssachen

Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Sie hat 3 T-Shirts, die sie besonders gerne trägt. Sie sind rot, grün und gelb.

Dazu hat sie 3 Jeans. Sie sind weiß, schwarz und blau.

Sie möchte jeden Tag etwas anders aussehen und kombiniert deshalb jeden T

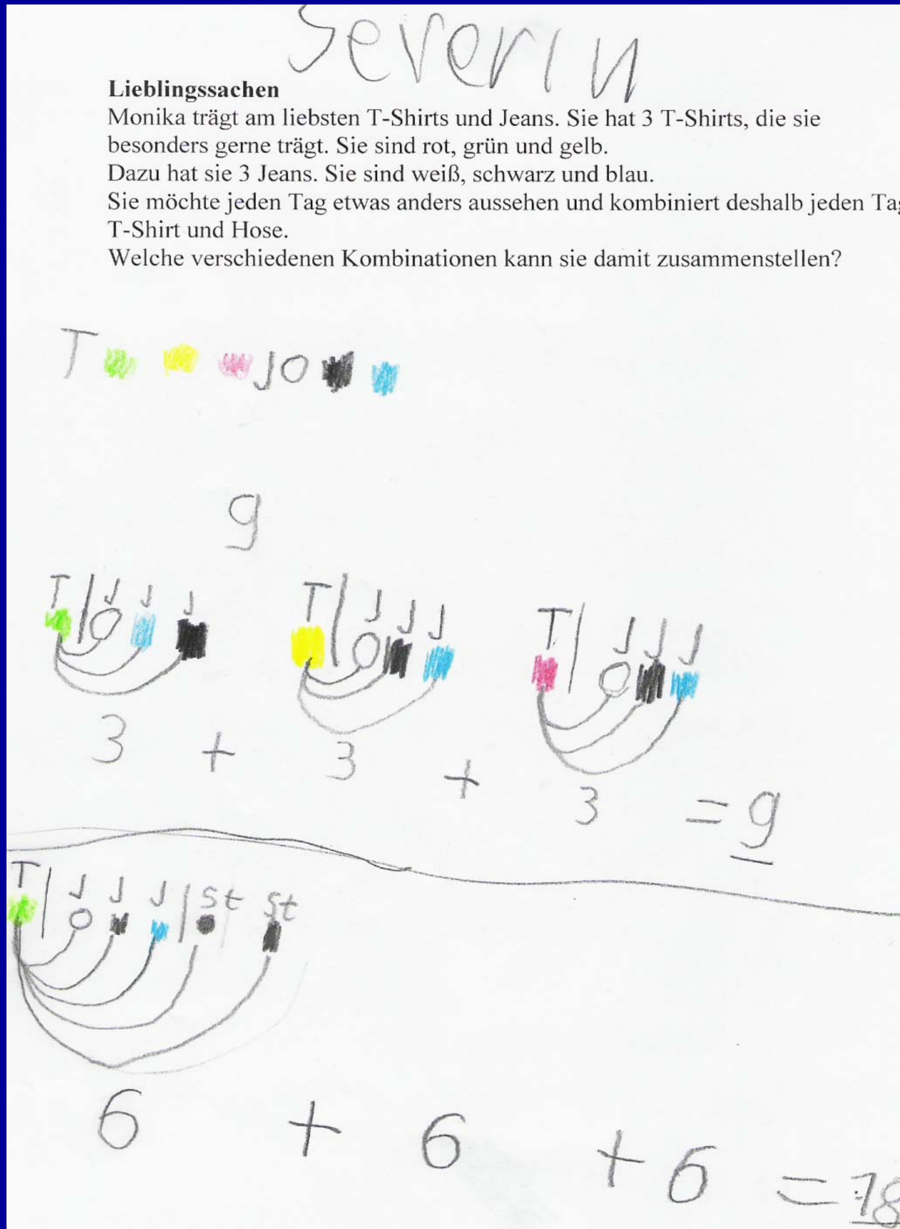
T-Shirt und Hose.

Welche verschiedenen Kombinationen kann sie damit zusammenstellen?

Gülselin

9

2. Klasse



Severin

Lieblingssachen

Monika trägt am liebsten T-Shirts und Jeans. Sie hat 3 T-Shirts, die sie besonders gerne trägt. Sie sind rot, grün und gelb.
Dazu hat sie 3 Jeans. Sie sind weiß, schwarz und blau.
Sie möchte jeden Tag etwas anders aussehen und kombiniert deshalb jeden Ta
T-Shirt und Hose.
Welche verschiedenen Kombinationen kann sie damit zusammenstellen?

2. Klasse

Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

Wichtig ist hier, dass aus jeder Teilmenge immer genau 1 Element mit jeweils eine anderen aus den anderen Teilmengen zugeordnet wird.

Schwieriger und ganz anders wird es, wenn aus einer Menge mehrere Teilmengen gebildet werden.

Drei Farben

Die Schüler von Frau Hauer sollen ein Bild malen und dabei nur 3 verschiedene Farben benutzen. Julian hat Farbstifte in den Farben Rot, Blau, Gelb, Orange, Grün und Rosa.

Welche Farbkombinationen gibt es für Julian sein Bild zu malen?
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Findest du sie alle?

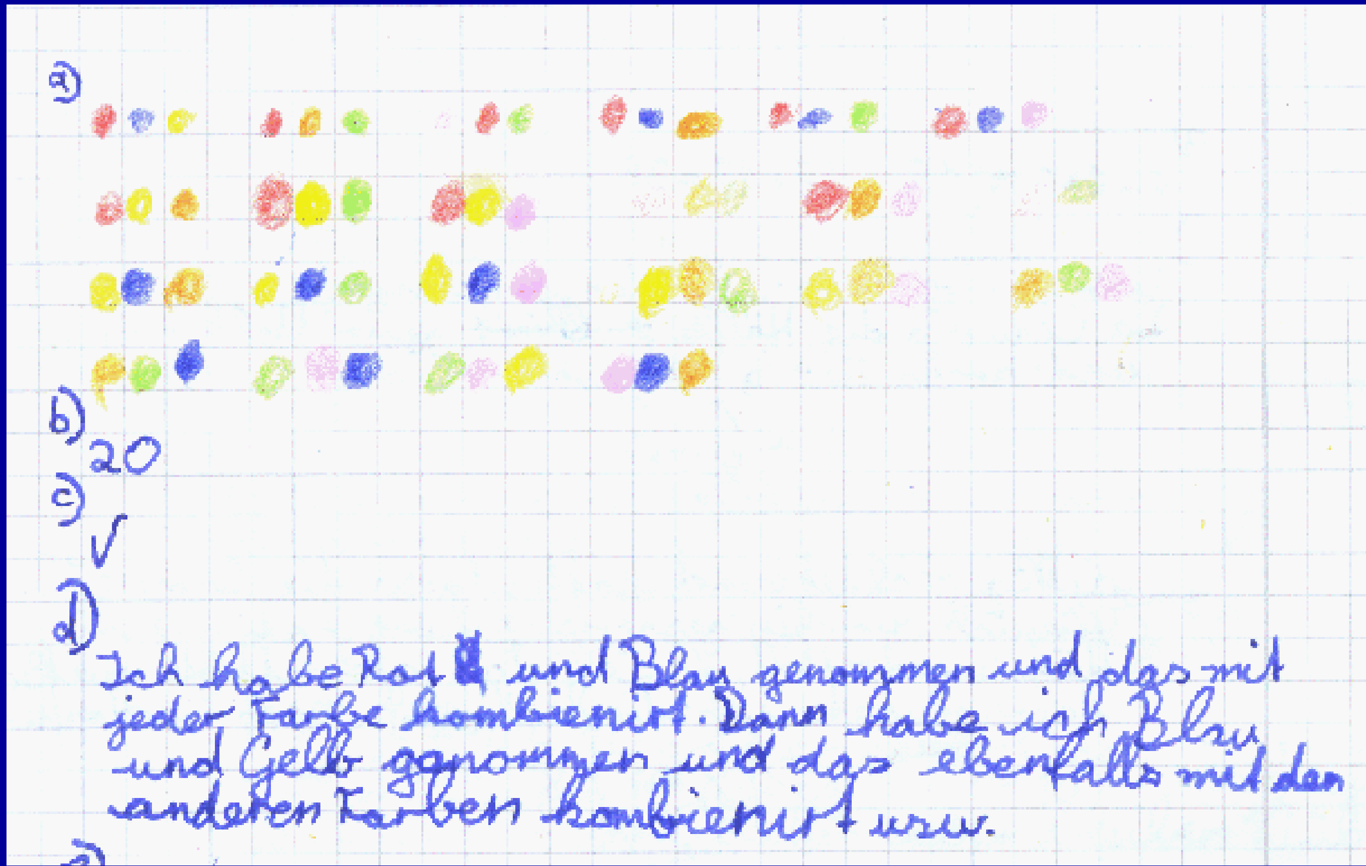
Schreibe schrittweise auf, wie du vorgegangen bist?
Woher weißt du, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?

(verändert aus: Wilkinson, Mike: Denksportaufgaben aus dem Alltag 5./6.Klasse)

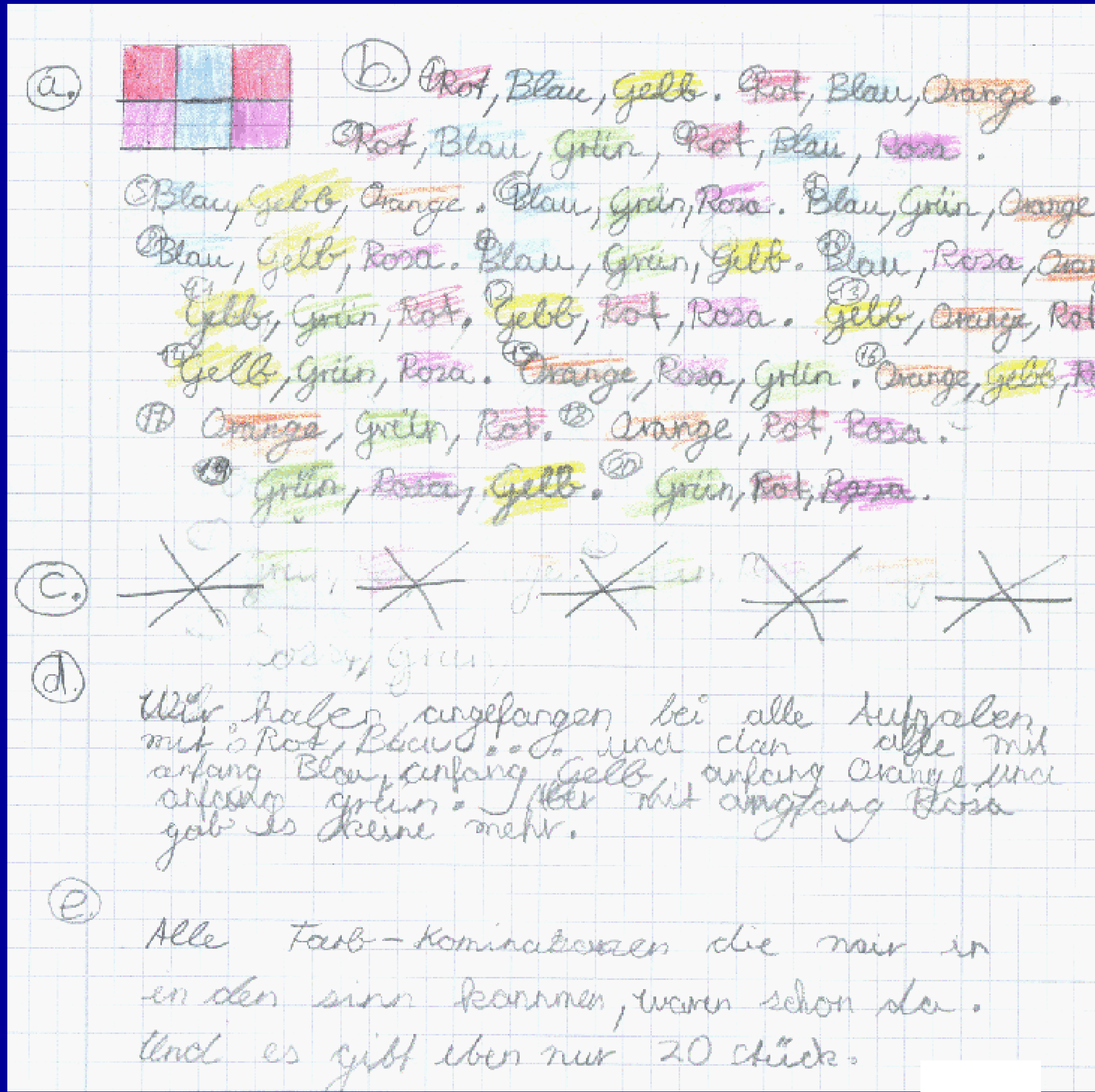
Tabelle


wir haben eine Tabele
gemacht wo jede farbe
eine eigenene spalte hat.
inder spalte haben an-
gekreuzt. erst haben w
die 1.2.u.3. Farbe genom
dan die 1,2,4 dan die 1,2,5
dan die 1,2,6 dan die 1,3,4
u.s.w so sind wir zu
dem schluss gekommen
das es 20 farbkombinatio

Geordnete Aufstellung



Geordnete Aufstellung


a.

b. ① Rot, Blau, Gelb. ② Rot, Blau, Orange. ③ Rot, Blau, Grün, ④ Rot, Blau, Rosa.
⑤ Blau, Gelb, Orange. ⑥ Blau, Grün, Rosa. ⑦ Blau, Grün, Orange
⑧ Blau, Gelb, Rosa. ⑨ Blau, Grün, Gelb. ⑩ Blau, Rosa, Ora[nge]
⑪ Gelb, Grün, Rot, ⑫ Gelb, Rot, Rosa. ⑬ Gelb, Orange, Rot
⑭ Gelb, Grün, Rosa. ⑮ Orange, Rosa, Grün. ⑯ Orange, Gelb, R[…]
⑰ Orange, Grün, Rot. ⑱ Orange, Rot, Rosa.
⑲ Grün, Rosa, Gelb. ⑳ Grün, Rot, Rosa.

c.

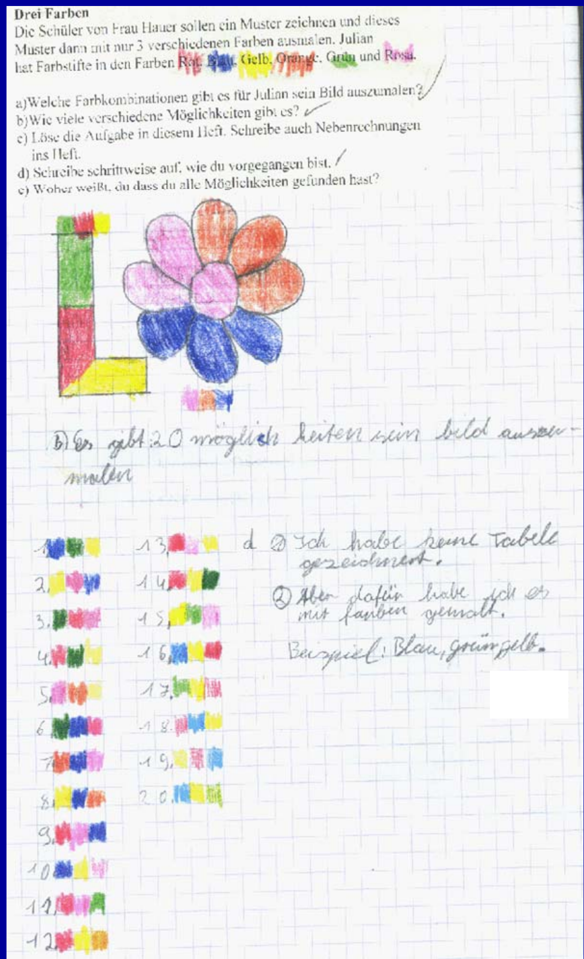
d. Wir haben angefangen bei alle Aufgaben mit Rot, Blau... und dan alle mit anfang Blau, anfang Gelb, anfang Orange und anfang grün. Aber mit angfang Rosa gab es keine mehr.

e. Alle Farb-Kominationen die mir in en den sinn kammen, waren schon da. Und es gibt eben nur 20 stück.

17.03.2008

Ungeordnete Aufstellung

(Muster
 zeichnen)

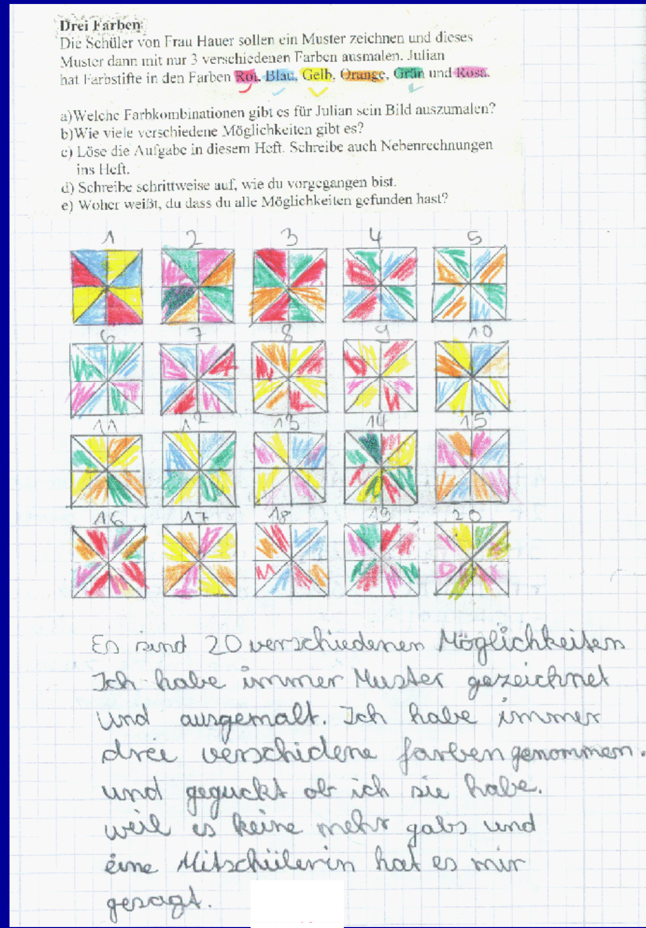

Drei Farben
Die Schüler von Frau Hauer sollen ein Muster zeichnen und dieses Muster dann mit nur 3 verschiedenen Farben ausmalen. Julian hat Farbstifte in den Farben Rot, Blau, Gelb, Orange, Grün und Rosa.

a) Welche Farbkombinationen gibt es für Julian sein Bild auszumalen?
b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
c) Löse die Aufgabe in diesem Heft. Schreibe auch Nebenrechnungen ins Heft.
d) Schreibe schrittweise auf, wie du vorgegangen bist.
e) Woher weißt, du dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?

b) Es gibt 20 möglich keiten sein bild auszumalen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

d ① Ich habe keine Tabelle gezeichnet.
② Aber dafür habe ich es mit farben gemalt.
Beispiel: Blau, grün, gelb.


Drei Farben
Die Schüler von Frau Hauer sollen ein Muster zeichnen und dieses Muster dann mit nur 3 verschiedenen Farben ausmalen. Julian hat Farbstifte in den Farben Rot, Blau, Gelb, Orange, Grün und Rosa.

a) Welche Farbkombinationen gibt es für Julian sein Bild auszumalen?
b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
c) Löse die Aufgabe in diesem Heft. Schreibe auch Nebenrechnungen ins Heft.
d) Schreibe schrittweise auf, wie du vorgegangen bist.
e) Woher weißt, du dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Es sind 20 verschiedenen Möglichkeiten
Ich habe immer Muster gezeichnet
und ausgemalt. Ich habe immer
drei verschidene farben genommen.
und geguckt ob ich sie habe.
weil es keine mehr gabs und
eine Mitschülerin hat es mir
gesagt.

Kombinationen ohne Wiederholung

Auswahl von k Elementen aus einer Menge G von n Elementen in einer beliebigen Reihenfolge.

Formel:

D.h., wie oft können aus n = 6 Elementen auf verschiedene Weisen Gruppen von k = 3 Elementen, deren Reihenfolge belanglos ist (ungeordnet, ohne Wiederholung), gebildet werden?

Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots k}$$

Die Elemente gelb, rosa ,grün besitzen die Anordnung 3! von den möglichen 6! Anordnungen (Permutation)

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$= 20$

Man schreibt das allerdings nicht mit Bruchstrich, sondern als Binomialkoeffizient:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$= 20$

(gelesen „6 über 3“)

Hilfsmittel und Strategien im Unterricht gezielt üben:

1. Aufgaben gleicher Art zusammenstellen:

- Aufgaben mit „Köpfen und Füßen“
- Aufgaben mit kombinatorischem Aspekt
- Aufgaben mit Zeit und Bewegung
- Aufgaben zum Rückwärtsarbeiten
- …..

2. Einstiegsaufgabe (aus dem Bereich „Köpfe und Füße“

Hühner und Kaninchen

Im Stall von Bauer Lindemann sind Hühner und Kaninchen. Insgesamt sind es 20 Beine.

a) Wie viele Hühner und Kaninchen könnte der Bauer haben.

Zur Differenzierung:

b) Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Findest du alle?

So gehe ich vor:

Die Knobelhefte mit der eingeklebten Aufgabe werden ausgeteilt.

Die Aufgabe wird gemeinsam gelesen und Fragen zum Text geklärt.

Anschließend arbeiten die Schüler erst allein, manchmal auch zu zweit. Sie finden eine Lösung und beschreiben ihren Lösungsweg im Heft. (Reflexion)

(Differenzierung durch Zusatzfragen oder Erweiterung d. A.)

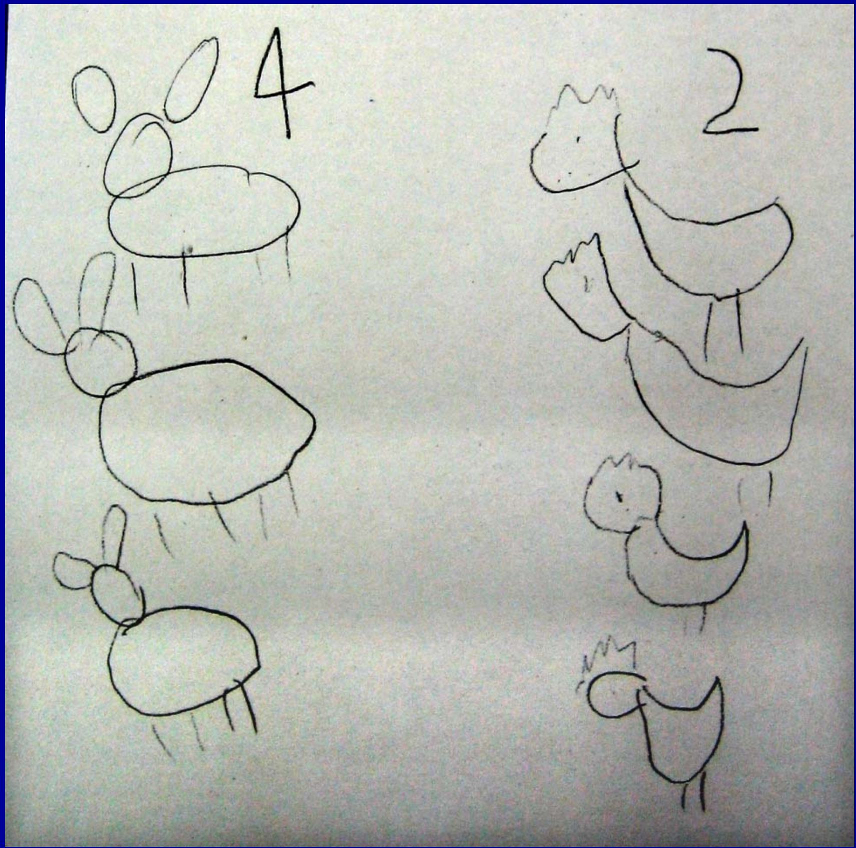
Verschiedene Lösungswege werden an der Tafel vorgestellt und diskutiert.

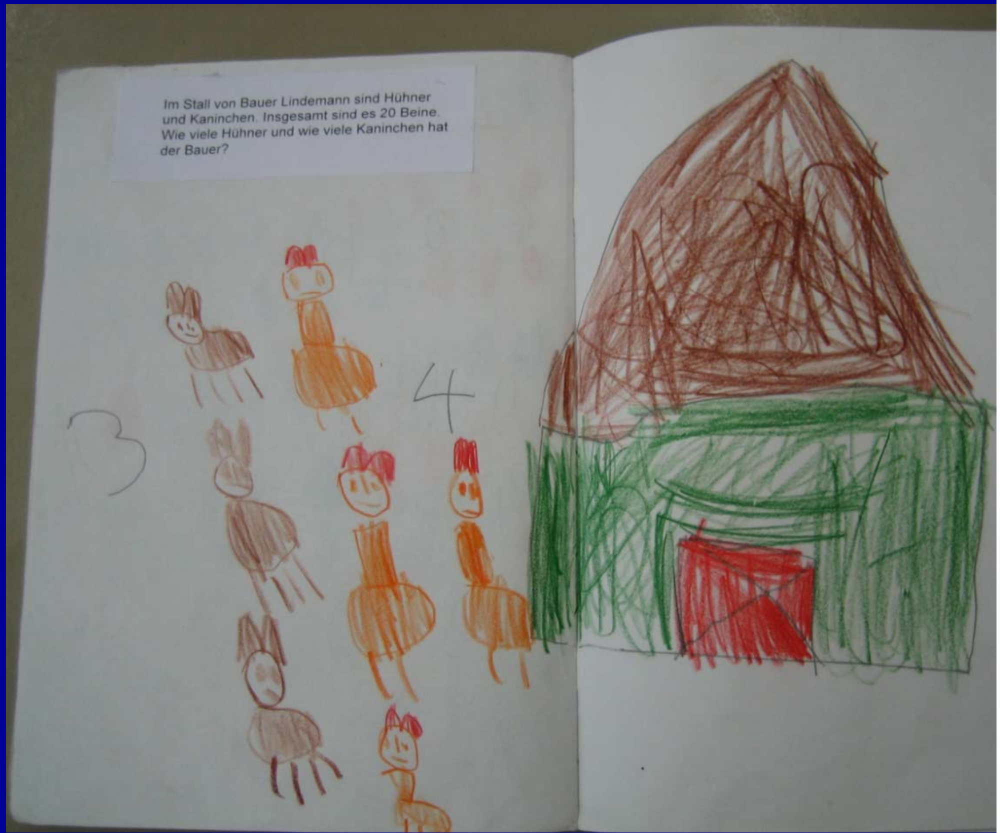
Die Aufgabe lässt mehrere Möglichkeiten zu.

Jeder findet mindestens eine Lösung.

Manche finden alle.

Geeignet ab Klasse 1 (hier kann Material zur Verfügung stehen)

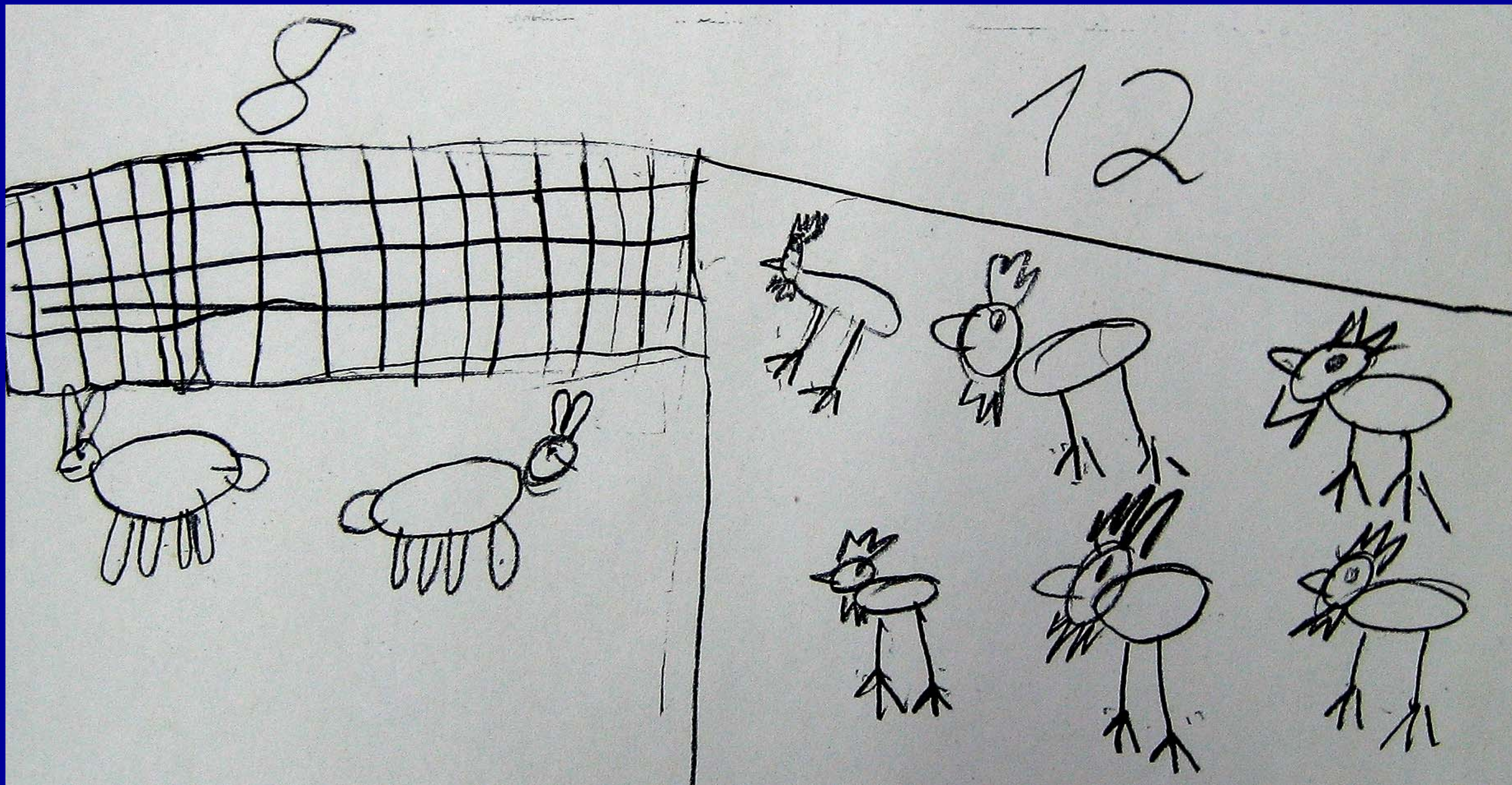




Probieren durch Zeichnen 1. Klasse

Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

1. Klasse



Probieren

Zeichnung

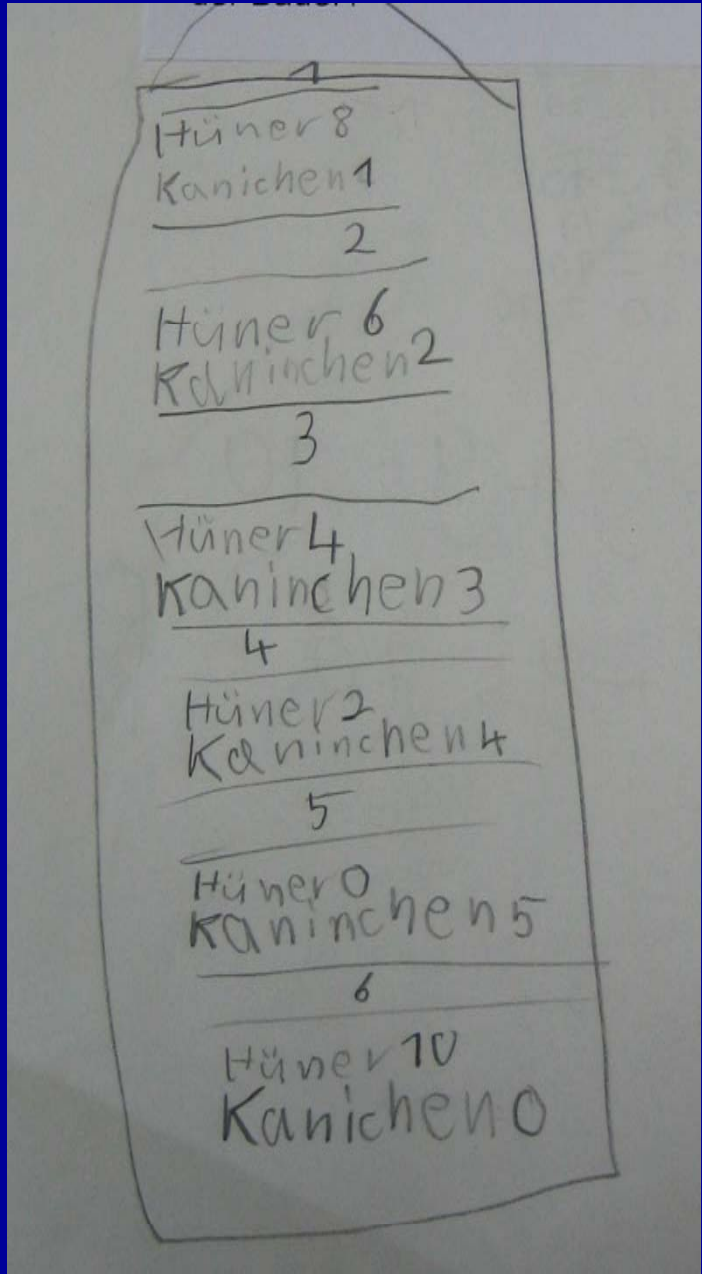
1. Klasse

2. Lösung

Geordnete
und
strukturierte

Aufstellung

1. Klasse



„Muss man zeichnen…?“

„Ich glaub‘ ich weiß den Trick…“

Kaninchen	Hühner	Füße
1	8	4 + 16
2	6	8 + 12
3	4	12 + 8
4	2	16 + 4

Tabelle

Gleichung:

x: Anzahl der Kaninchen

y: Anzahl der Hühner

$$4x + 2y = 20 \qquad /-4x$$

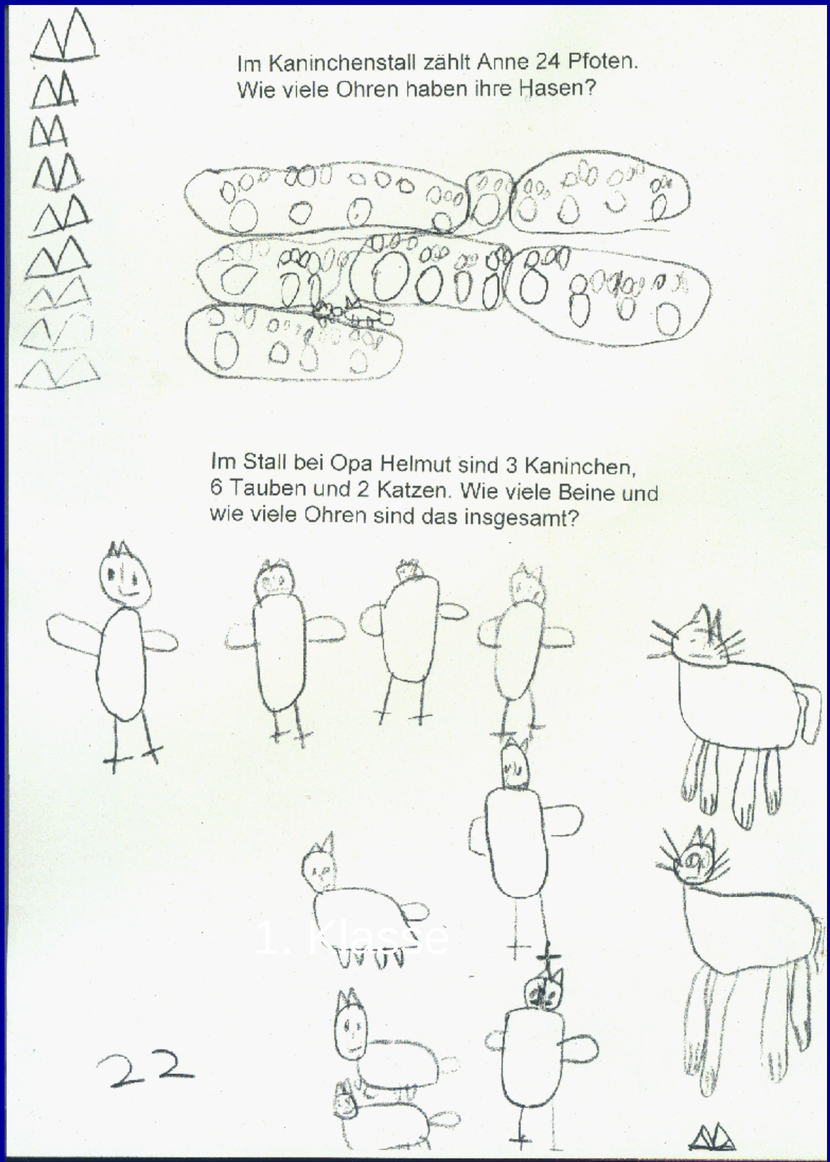
$$2y = 20 - 4x \qquad /:2$$

$$y = 10 - 2x$$

$x=1 \Rightarrow y= 8$ (also 1 Kaninchen/8 Hühner)

$x=2 \Rightarrow y= 6$ (also 2 Kaninchen/6 Hühner)

u.s.w.



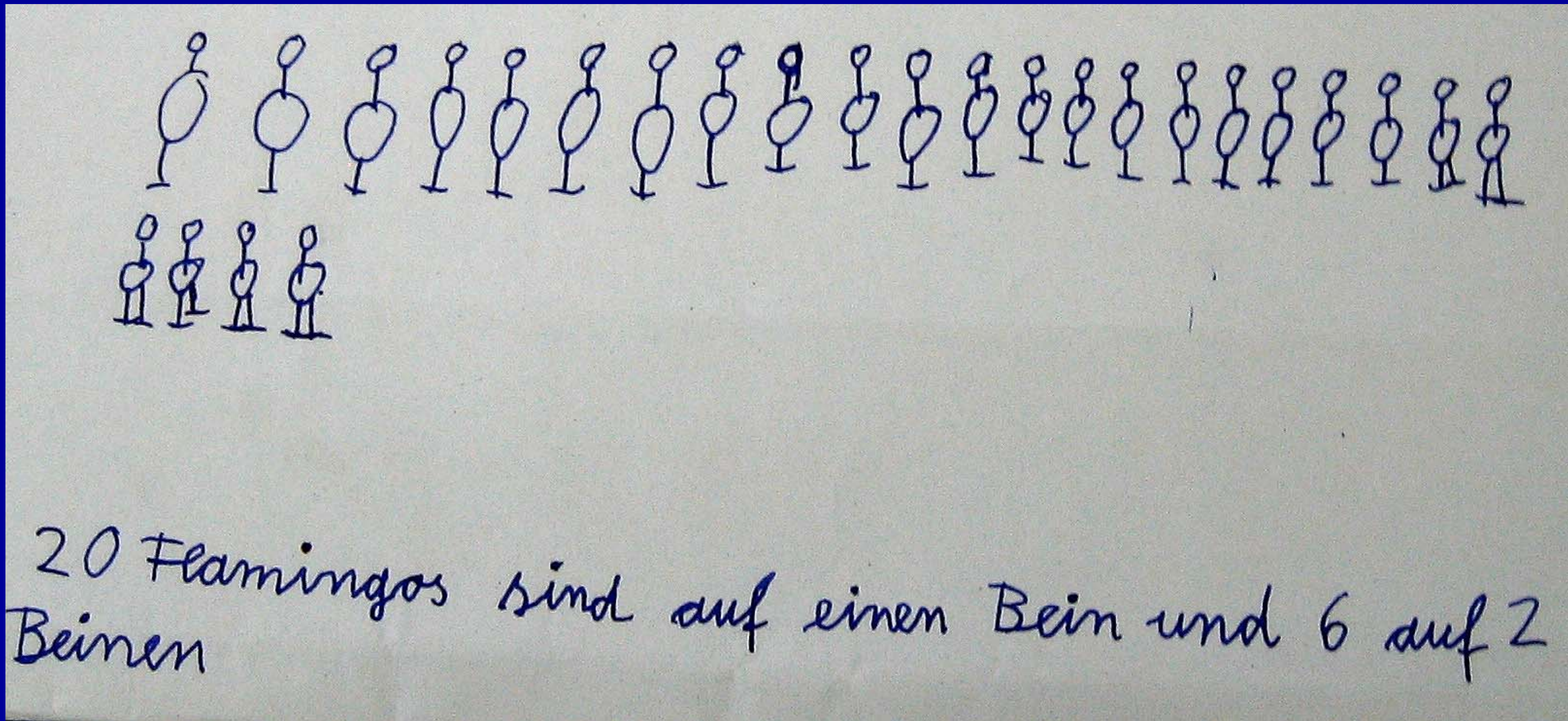
Die nächste Aufgabe in der 1. Klasse:

Im Kaninchenstall zählt Anne 24 Pfoten. Wie viele Ohren haben ihre Kaninchen?

Im Stall bei Opa Helmut sind 2 Kaninchen, 6 Tauben und 2 Katzen. Wie viele Beine und wie viele Ohren sind das insgesamt?

nach: Käpnick, F. (Hrsg.)/ Fuchs, M.: Mathe für kleine Asse Kl. ½.
Cornelsen, 2005

Im Zoo sind 26 Flamingos. Einige stehen auf einem Bein, andere auf 2 Beinen. Die Kinder zählen 32 Beine.

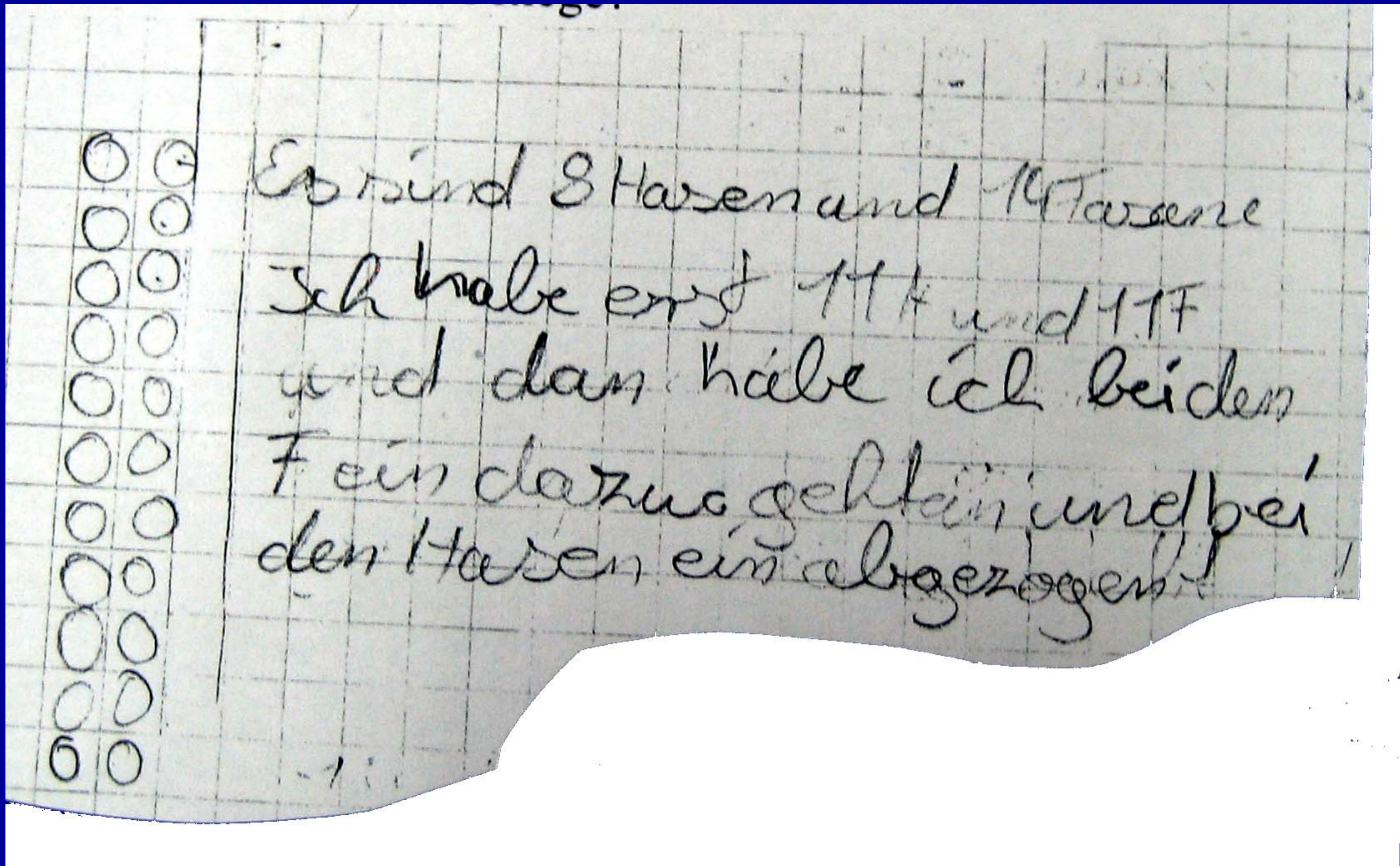


3. Klasse

Hasen und Fasane

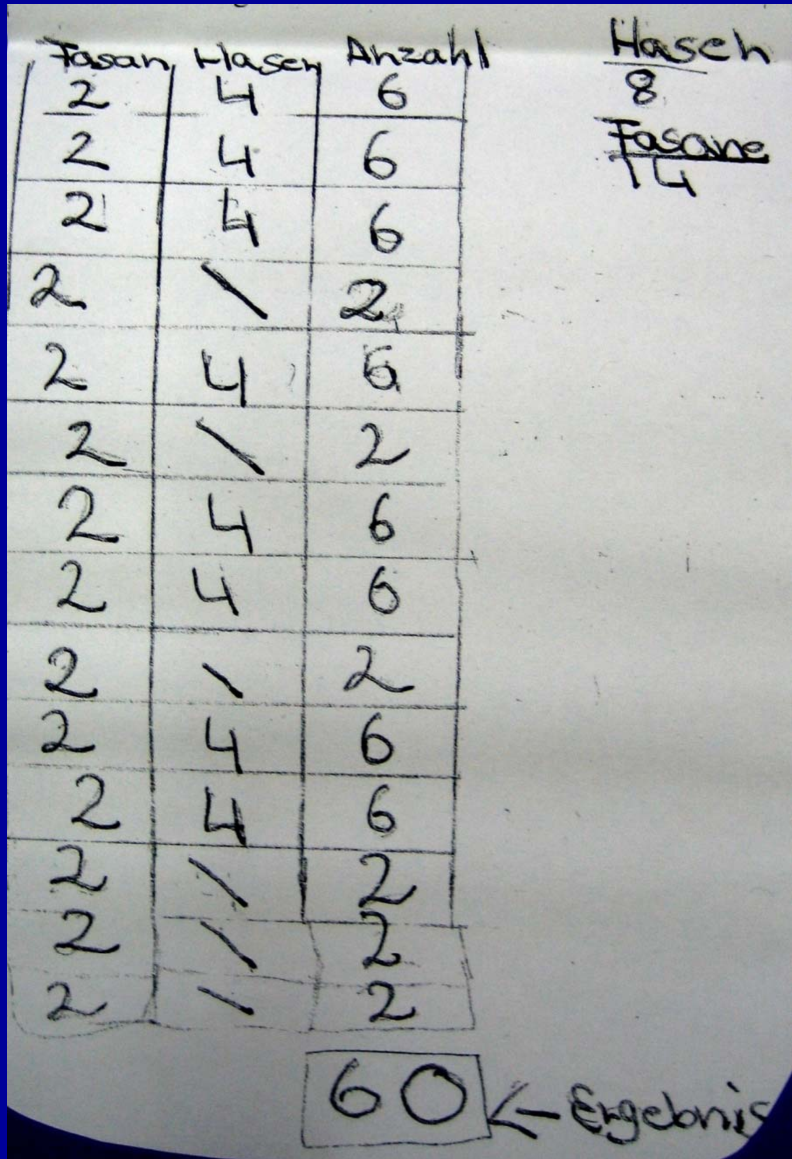
Ein Bauer geht an seinem Gehege mit Hasen und Fasanen vorbei und sagt: „Ich zähle 22 Köpfe und 60 Füße.“ Wie viele Hasen und Fasane waren im Gehege.

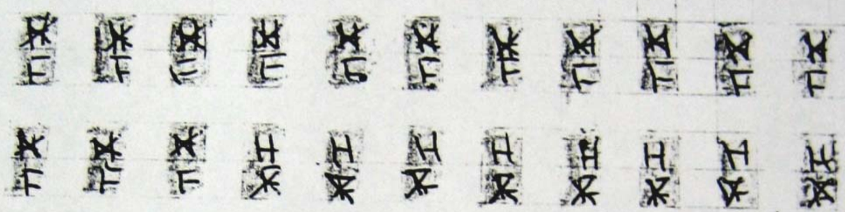
Strategie: Probieren


Es sind 8 Hasen und 14 Fasane
Ich habe erst 11 H und 11 F
und dan habe ich beiden
F ein dazu gehtan und bei
den Hasen ein abgezogen!

Strategie:
Probieren

Hilfsmittel:
Tabelle





Rechnung: $14 \cdot 2 = 28$ Gute Idee!

28 Fasanenfüße

$8 \cdot 4 = 32$

32 Hasenfüße

$32 + 28 = 60$

Antwort: Es sind ~~28~~ 14 Fasanen und 8 Hasen.

Zeichnung: Die 22 Roten Doppelkästchen die entweder F(Fasan) oder H(Hase) sind. F=2Füße H=4 Füße Es stimmt H oder F.

Gleichung:

x: Anzahl der Fasane

y: Anzahl der Hasen

$x + y = 22 \Rightarrow x = 22 - y$

$2x + 4y = 60$

$2\,(22 - y) + 4y = 60$

$44 - 2y + 4y = 60$

$44 + 2y = 60 \quad / -44$

$2y = 16 \quad / :2$

$y = 8$ also 8 Hasen

14 Fasane

Invarianzprinzip

Invarianz heißt „Unveränderlichkeit“ und bedeutet: Es gibt mindestens eine Sache, die sich nicht verändert, auch wenn sich insgesamt in der Situation Dinge ändern.

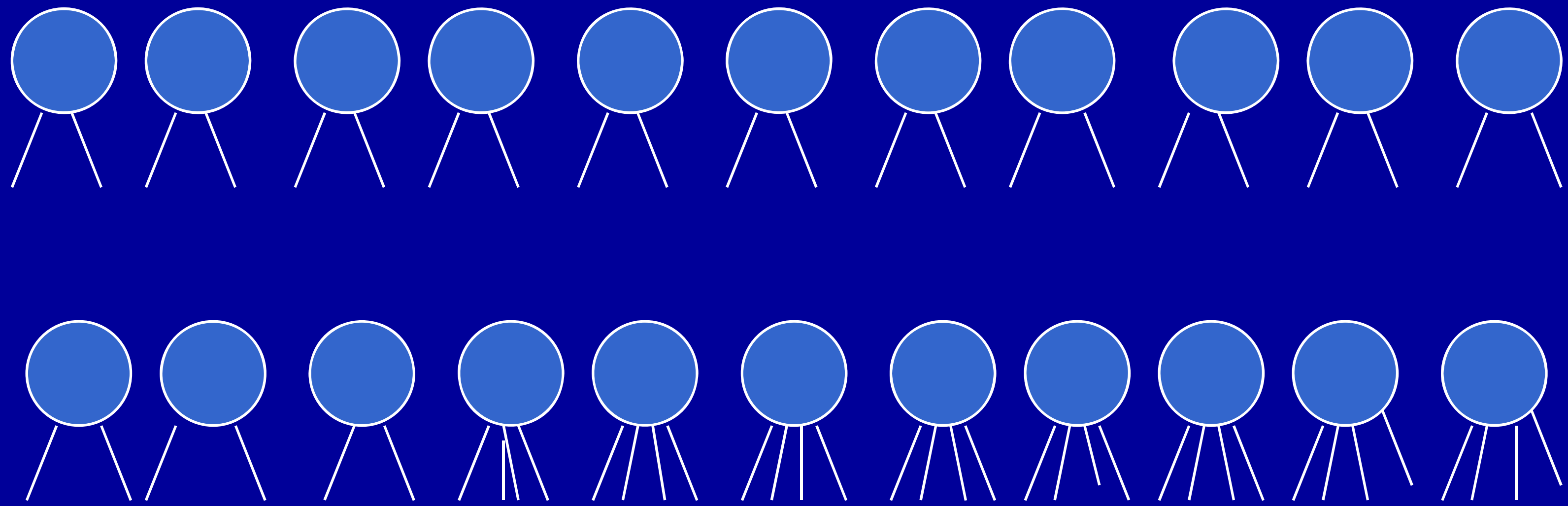
Man fragt sich:

- Was ändert sich nicht?
- Was haben alle Objekte gemeinsam?

Kaninchen und Fasanenaufgabe:

Jedes Tier hat mindestens 2 Füße. (Invarianz)

Wir verteilen auf die 22 Tiere (es gibt ja 22 Köpfe) jeweils schon mal zwei Füße. Es bleiben 16 übrig.
Diese müssen sich ja auf die Kaninchen verteilen, so dass noch 8 Kaninchen je zwei Füße mehr bekommen können.
Es gibt also 8 Kaninchen und damit 22-8=14 Fasane.



22 Köpfe
Jeweils 2 Füße = 44 Füße; es bleiben 16 Füße übrig
Paarweise an die Köpfe = 8 Hasen d. f. 14 Fasane

Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

Reifen-Aufgabe:

Im Winter tauschen viele Autobesitzer ihre Winterreifen in Sommerreifen. Viele lassen das in einer Werkstatt machen. Der Lehrling will seinem Meister so richtig zeigen, wie fit er ist und sagt zum Schichtschluss: „Es wurden an 14 Fahrzeugen die Reifen gewechselt. Es waren Motorräder und Autos dabei. Insgesamt waren es 40 Reifen."

Wie viele Autos und wie viele Motorräder waren dabei?

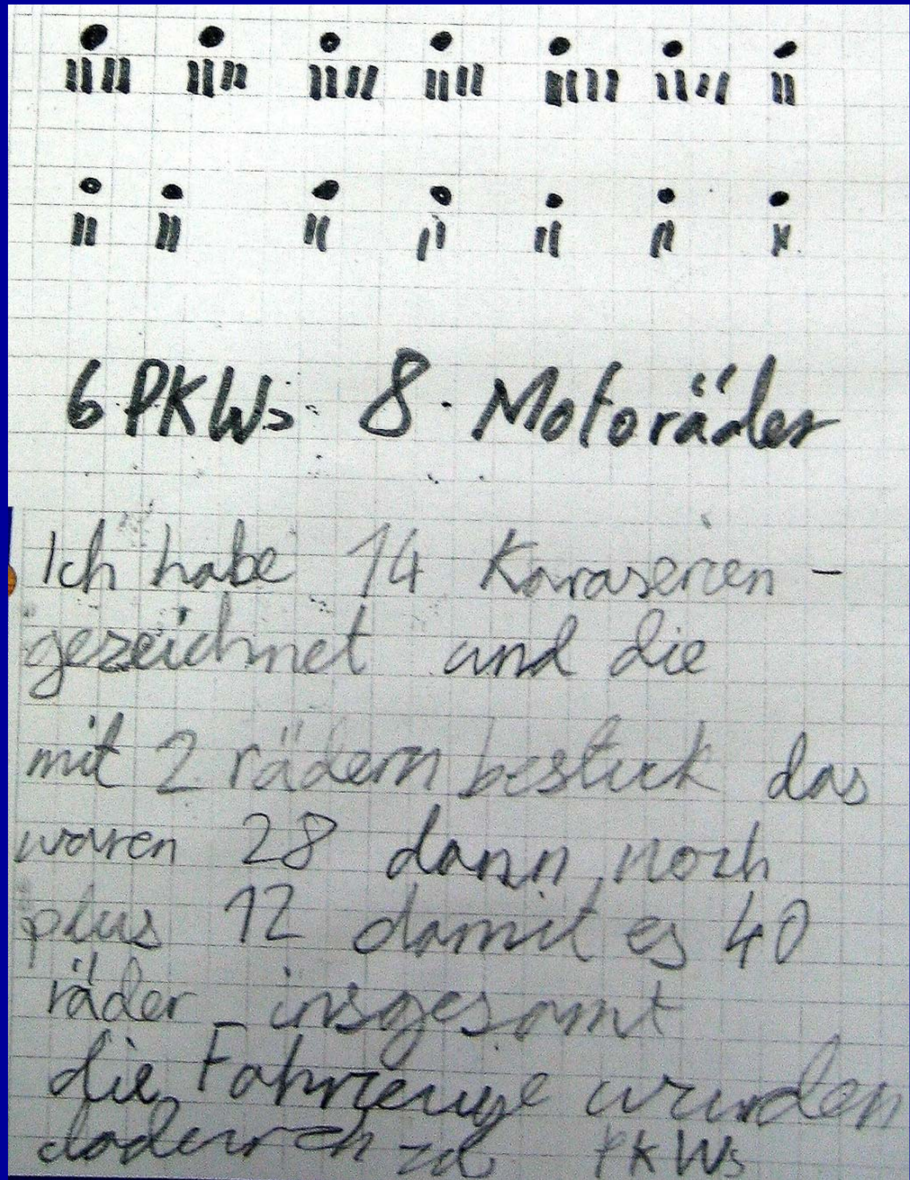
Differenzierung:

a) Und wenn es 16 Fahrzeuge und 40 Reifen wären?

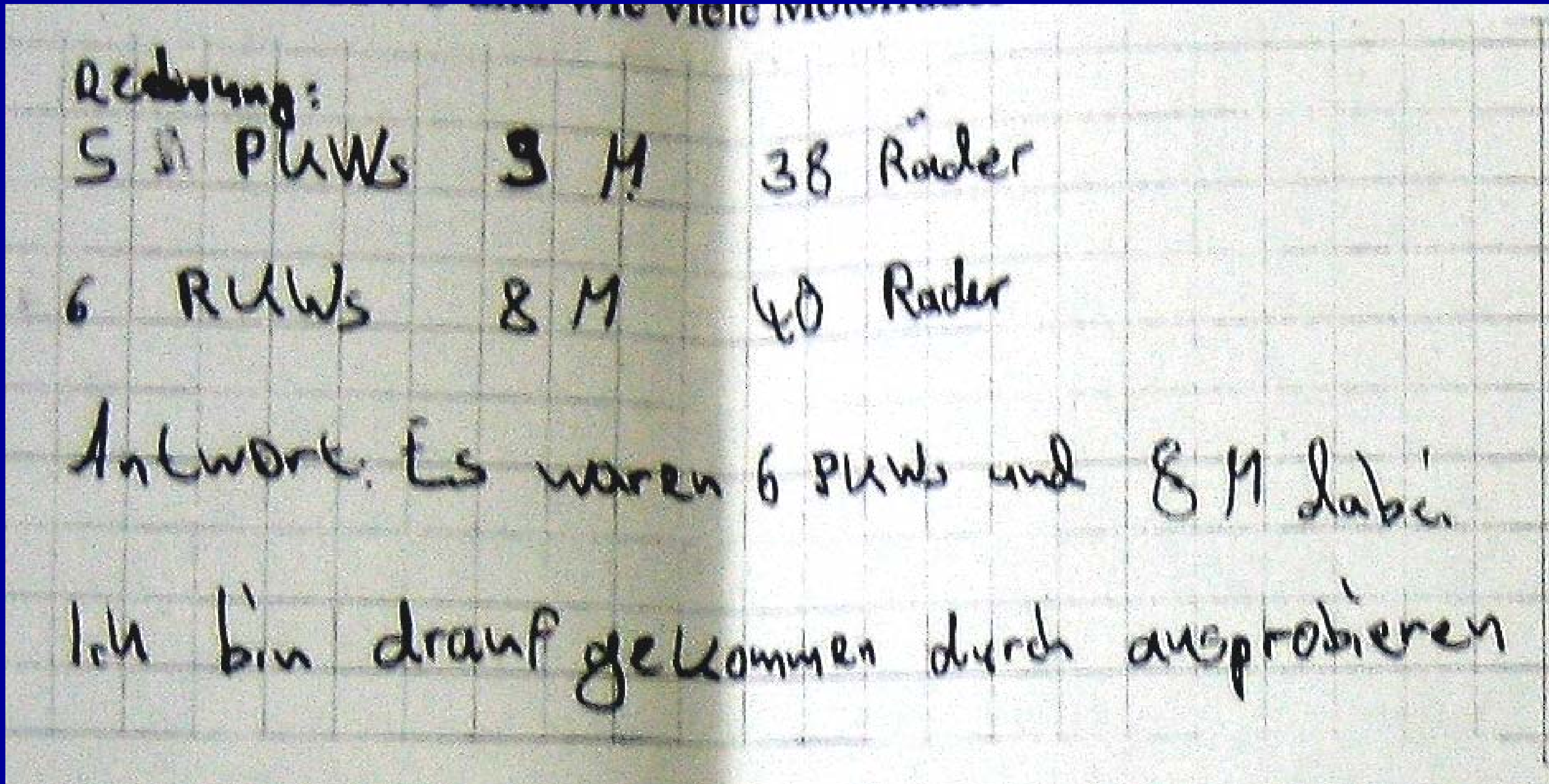
b) Können es auch 22 Fahrzeuge und 40 Reifen sein? Begründe!

c) Wie viele Fahrzeuge sind es bei 40 Reifen mindestens, wie viele sind es höchstens?

Invarianzprinzip



Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule



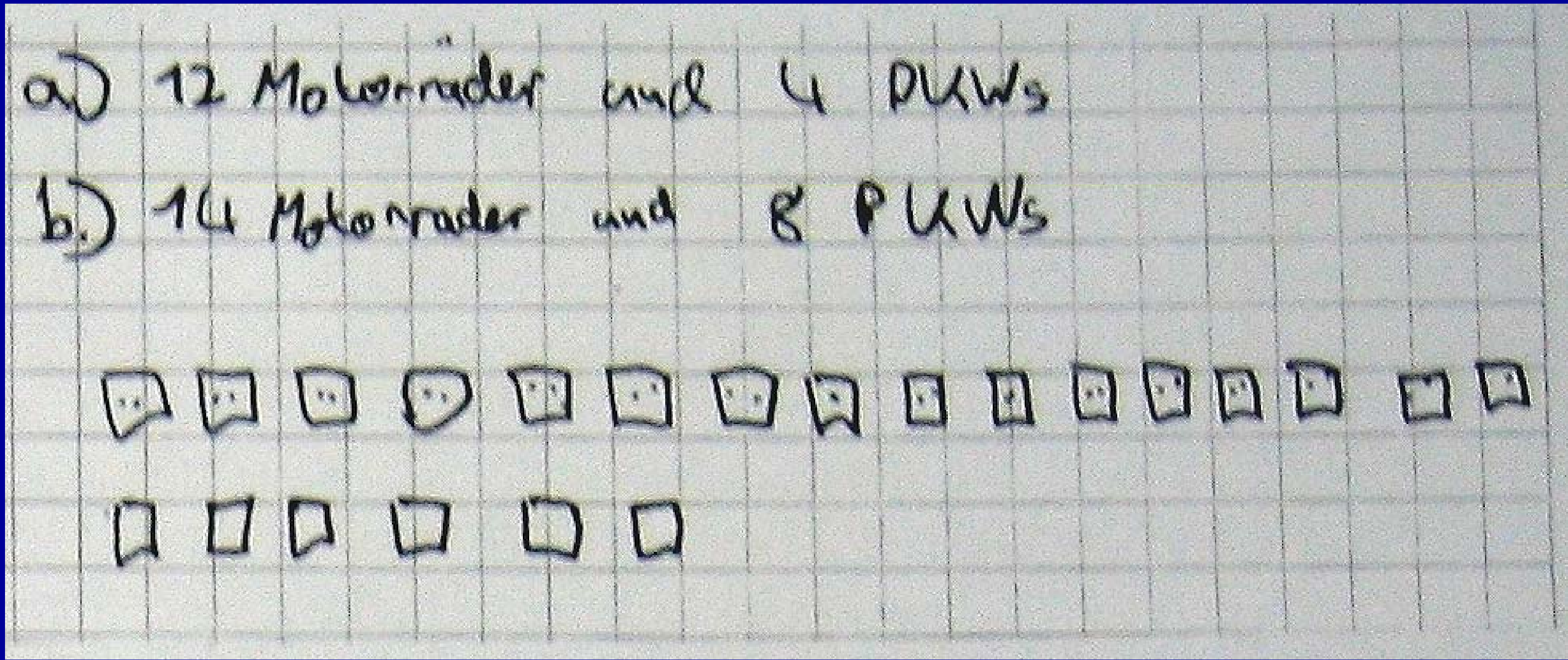
Rechnung:

5 ~~1~~ PkWs 9 M 38 Räder

6 RkWs 8 M 40 Räder

Antwort: Es waren 6 PkWs und 8 M dabei

Ich bin drauf gekommen durch ausprobieren


a) 12 Motorräder und 4 PKWs
b) 14 Motorräder und 8 PKWs

=) Nur mit PKWs wären es mindestens 10 Fahrzeuge

Mit beiden Fahrzeugen wären es min 9 PKWs

und 2 Motorräder

Nur mit Motorräder wären es min 20 M

Höchstens könnten es mit beiden Fahrzeugen 18 M

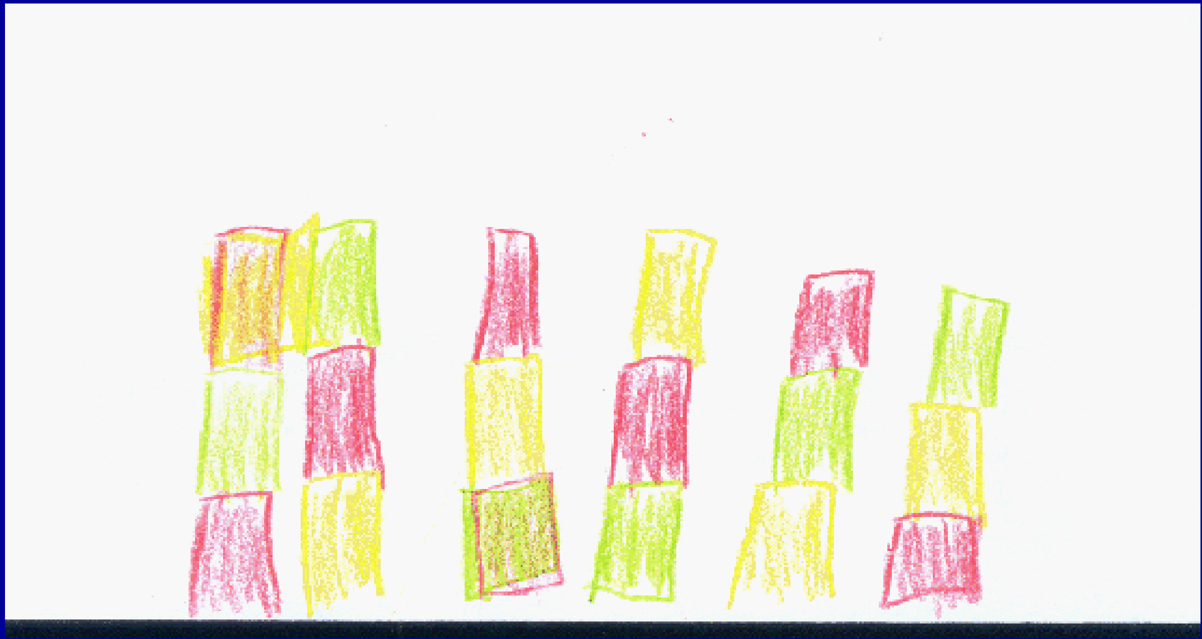
und 1 PKW

Einstiegsaufgabe in den kombinatorischen Bereich:

Farbige Türme (1. Klasse):

Du hast rote, gelbe und grüne Bausteine. Versuch, so viele verschiedene Türme mit drei Etagen wie möglich zu bauen! Jeder Turm soll aus den drei Farben bestehen. Jede Farbe muss einmal vorkommen. Wie viele verschiedene Türme kannst du bauen?

- Die Aufgabe lässt mehrere Möglichkeiten zu.
- Jeder findet Lösungen.
- Manche finden alle.
- Man kann mit konkretem Material arbeiten.
- Sie ist beliebig zu erweitern.
- Geeignet ab Klasse 1.



Material

Zeichnung

Schülerlösung
1. Klasse

Farbige Türme

Du hast rote, gelbe und grüne Bausteine. Versuch, so viele verschiedene Türme mit drei Etagen wie möglich zu bauen! Jeder Turm soll aus den drei Farben bestehen. Jede Farbe muss einmal vorkommen. Wie viele verschiedene Türme kannst du bauen?

Material

Skizze

Schülerlösung
1. Klasse

Anita Pfeng
Sinus-Transfer-Grundschule

Die nächste Aufgabe könnte jetzt eine Aufgabe mit ähnlicher Struktur sein, in der die Schüler ihre Strategie anwenden können.

z. B.

Fahrradschloss knacken

Peter hat die Zahl für sein Fahrradschloss vergessen. Glücklicherweise weiß er noch, dass es eine dreistellige Zahl aus den Ziffern 4 ,5 und 6 war. Jede Ziffer kam nur einmal vor. Welche und wie viele dreistellige Zahlen muss er im schlimmsten Fall ausprobieren?

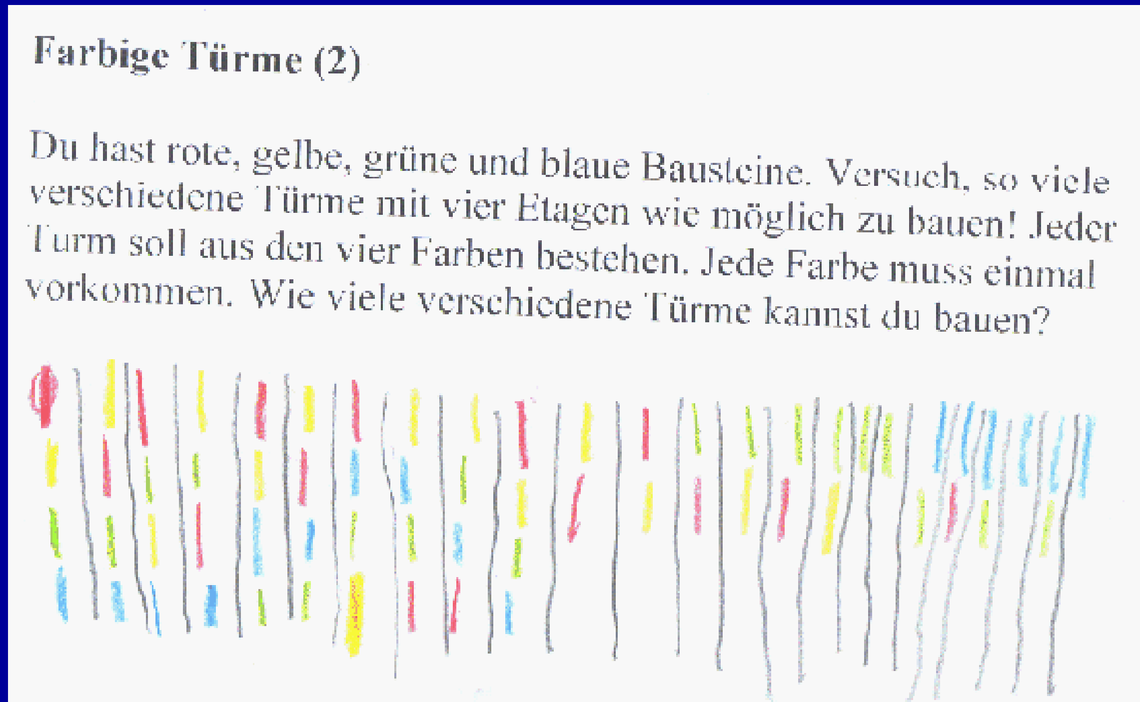
Oder die Anzahl der Bausteine wird erhöht. (Anzahl der Farben entspricht der Anzahl der Stockwerke.)

ohne Material

Skizze

Schülerlösung

1. Klasse



Farbige Türme (2)

Du hast rote, gelbe, grüne und blaue Bausteine. Versuch, so viele verschiedene Türme mit vier Etagen wie möglich zu bauen! Jeder Turm soll aus den vier Farben bestehen. Jede Farbe muss einmal vorkommen. Wie viele verschiedene Türme kannst du bauen?

„Ich habe den Trick gefunden…..“

Formel:

Aufgabentyp aus der Permutation (An- und Umordnungen):
Anordnung von Elementen ohne Wiederholung

Pn = n!

n! heißt Fakultät von n und wird so berechnet:

$n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet (n-3) \bullet \ldots \bullet 1$

n ist in unserem Fall die Anzahl der Farben:

$3! = 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6$ Anordnungen sind möglich.
$4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 24$ Anordnungen sind möglich.

2 Kugeln Eis

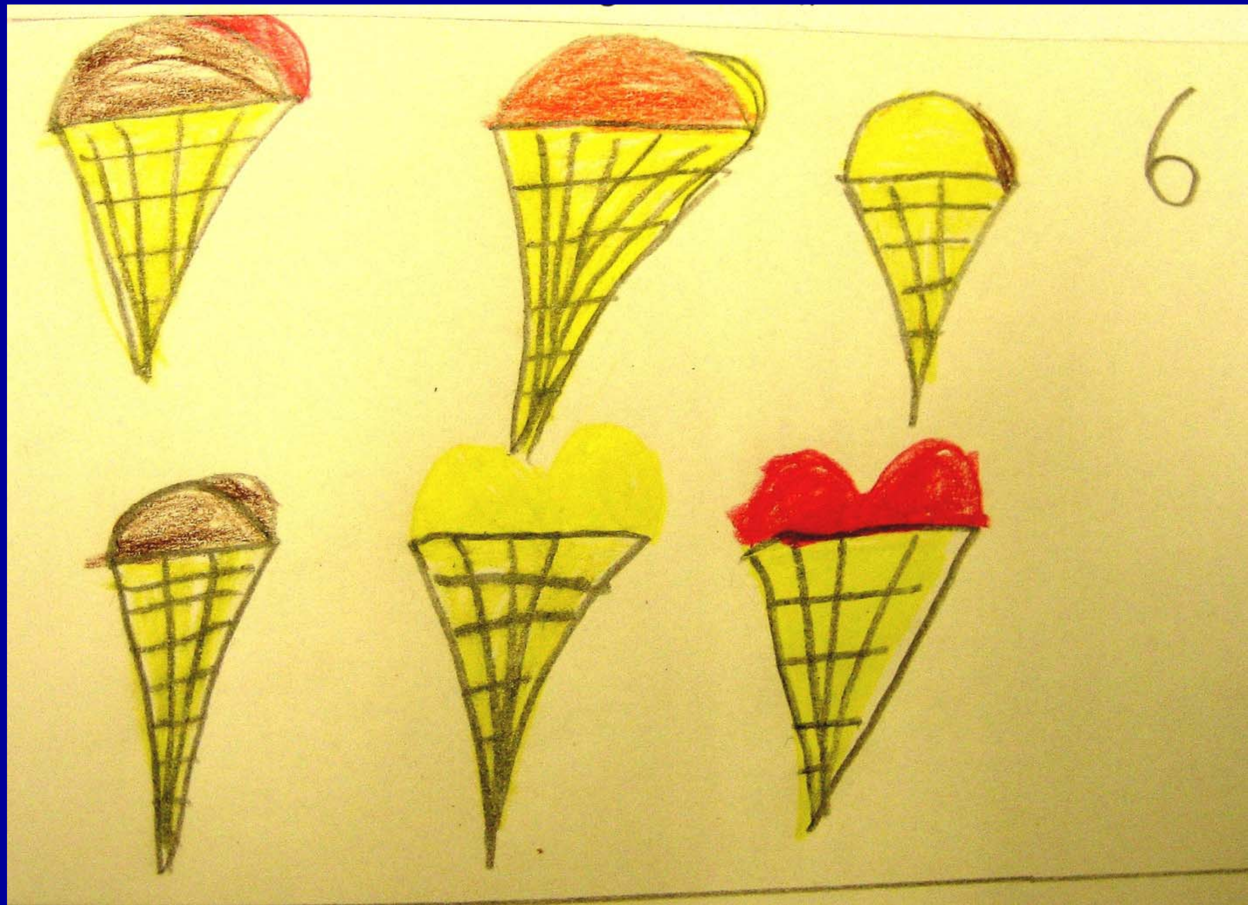
Anne möchte sich ein Eis kaufen. Sie hat Geld für 2 Kugeln Eis. Der Eisverkäufer bietet 3 Sorten Eis an: Schoko, Vanille und Himbeereis.

Was für ein Eis könnte sich Anne kaufen? Finde verschiedene Möglichkeiten!

Probieren

Rechenbild
(Skizze)

Material



Schülerlösung

1. Klasse

Probieren

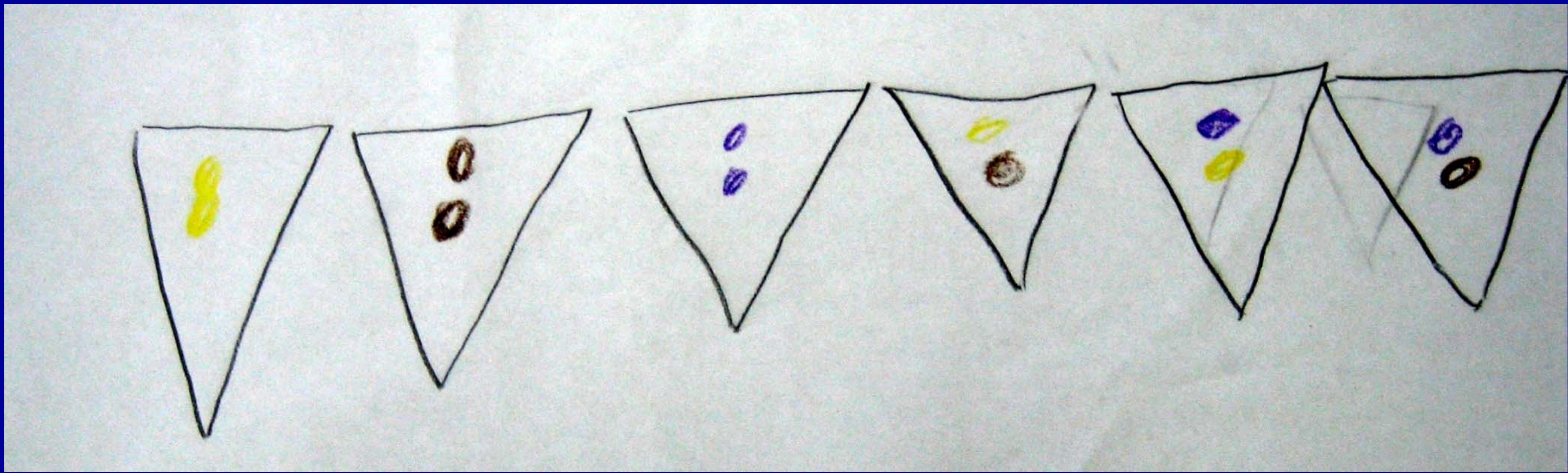
Rechenbild

(Skizze)

Material

Schülerlösung

1. Klasse



Probieren
Skizze

Schülerlösung

1. Klasse

Schwierigkeiten in der Kombinatorik:

Elemente aus einer Menge auswählen:

- ohne Wiederholung (Türme)
- mit Wiederholung (Eis)
- mit Reihenfolge (Türme)
- ohne Reihenfolge (Eis)

Warum Kombinatorik in der Grundschule?

- Kinder werden außerhalb der Schule schon frühzeitig mit Phänomenen konfrontiert, die kombinatorische Überlegungen erfordern.
- Das Verstehen von Problemen der Kombinatorik braucht Zeit, deshalb muss man früh beginnen.
- Es werden nur Rechnungen im Bereich der natürlichen Zahlen gebraucht.
- Es gibt vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung.
- Ein gutes Übungsfeld für das Problemlösen, es regt die Kreativität an, fördert Strategiedenken und die Argumentationsfähigkeit.

Wie sollen sie in den Unterricht integriert werden?

- Es ist kein eigenständiges Stoffgebiet, sondern sollte als ein Aspekt den gesamten Mathematikunterricht durchziehen.

Die Aufgaben

- sollen die Schüler inhaltlich ansprechen
- eigenes praktisches Tun ermöglichen
- sollten den Schülern die Möglichkeit geben, durch unterschiedliche Wege zum Ziel zu kommen.

- Heuristische Methoden und Techniken sind bei ihrer Anwendung keine Lösungsgaranten.
- Sie können nicht wie starre Rezepte angewendet werden.
- Wenn man sie aber mehrfach übt und in unterschiedlichen Aufgaben anwendet, prägen sie sich auch als unbewusstes Mittel ein und schaffen Erfolgserlebnisse, auch bei „schwachen“ Schülern.
- Sie sorgen für die gut ausgeprägte geistige Beweglichkeit, die besonders bei Problemhaltigen Aufgaben nötig ist.

Bei den Schülern

- ist eine deutlich höhere Motivation erkennbar.
- prägen sich die Methoden und Strategien durch mehrfaches üben auch als unbewusstes Mittel ein, auch wenn sie nicht wie starre Rezepten angewendet werden können.
- stellen sich Erfolgserlebnisse und ein spürbarer Lernerfolg ein.
- wird eine gut ausgeprägte geistige Beweglichkeit gefördert, die besonders bei Problemhaltigen Aufgaben nötig ist.

Vielen Dank!

Literaturliste:

- **Bücher in denen Aufgaben zum Knobeln und Denken zu finden sind:**
- Fuchs, M./ Käpnick, F.(Hrsg.): Mathe für kleine Asse 1/2. Cornelsen Verlag, 2005
- Käpnick, F (Hrsg.).: Mathe für kleine Asse 3/4. Cornelsen Verlag, 2005
- Fritzlar, T./Rodeck,K./Käpnick, F. (Hrsg.).: Mathe für kleine Asse 5/6 Cornelsen Verlag, 2006

- Rasch, R.: 42 Denk- und Sachaufgaben. Kallmeyer Verlag, 2003
- Bardy, P./Hrzán, J.: Aufgaben für kleine Mathematiker. Aulis Verlag Deubner, 2005
- Wilkinson, M.: Denksportaufgaben aus dem Alltag. Auer-Verlag,2005
- Hasemann,K./Leonhardt,U./Szambien,H.: Denkaufgaben für die 1. und 2. Klasse. Cornelsen-Verlag, 2006
- Nobach,I./Schmitt,E./Truxius,E-M.: Knobel-Aufgaben für die 3. und 4. Klasse. Cornelsen- Verlag, 2006
- Bruder, R.: Heureka-Problemlösen lernen. In: Mathematik lehren Nr. 115. Friedrich-Verlag, 2002

- **Literatur zum Thema:**
  Neubert, Bernd: Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In: S. Ruwitsch/A. Peter-Koop (Hrsg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg:Mildenberger.
- Bruder, R.: Heureka-Problemlösen lernen. In: Mathematik lehren Nr. 115. Friedrich-Verlag, 2002
  Bruder,R.: Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung. aus: Internet
- Bruder,R: Modul1 von Sinus-Transfer: Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht.
- Bruder,R: Modul 4 von Sinus-Transfer: Sicherung von Basiswissen-Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus.
- Büchter,A./Leuders,T.: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Cornelsen Verlag,2005